C. R. Acad. Sci. Paris, t. 3??, Série I, p. 000–000, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Existence d'une solution pour un modèle de deux fluides turbulents couplés

Christine BERNARDI [a], **Tomas CHACON** [b], **Roger LEWANDOWSKI** [c], **François MURAT** [a]

[a] **Analyse Numérique, C.N.R.S. & Université Pierre et Marie Curie, boîte 187, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.**

[b] **Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Analisis Numerico, Universidad de Sevilla, Tarfia s/n, 41012 Sevilla, Espagne.**

[c] **MODAL'X, Université Paris X, 200 avenue de la République, 92001 Nanterre, France.**

(Reçu le 1999)

Résumé. *Le but de cette Note est de prouver l'existence d'une solution d'un système d'équations aux dérivées partielles qui modélise deux fluides turbulents dans des domaines adjacents, couplés par des conditions aux limites non linéaires sur l'interface.* ⓒ Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Existence of a solution for a model of two coupled turbulent fluids

Abstract. The aim of this Note is to prove the existence of a solution for a system of partial differential equations which modelizes two turbulent flows on adjacent subdomains, coupled by nonlinear boundary conditions on the interface. ⓒ Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

Let Ω_1 and Ω_2 be two bounded domains of $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ or 3, which are either convex or of class $\mathrm{C}^{1,1}$, and such that the interface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ is contained and has a positive measure in a hyperplane of $\mathbb{R}^d$, and coincides with the intersection of both $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$ with this hyperplane. For $1 \leq i \leq 2$, we set $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \Gamma$ and we denote by $\boldsymbol{n}_i$ the unit outward normal to Ω_i on Γ. In this Note, we study the system (1), which modelizes the stationary flows of two turbulent fluids F_1 and F_2, where each fluid F_i is located in Ω_i, has velocity $\boldsymbol{u}_i$, pressure p_i and turbulent kinetic energy k_i. An example of such a model is provided by the system ocean–atmosphere, see e.g. [3] and [2, Chap. 3]. The functions α_i and γ_i in (1), which represent the eddy viscosities, are given and supposed to satisfy (2) for a positive constant ν. The main result of this Note is stated in the following theorem.

Theorem 1. *For any data $\boldsymbol{f}_i$ in $L^2(\Omega_i)^d$, $1 \leq i \leq 2$, system (1) has a solution $(\boldsymbol{u}_i, p_i, k_i)_{1\leq i\leq 2}$ in $\prod_{i=1}^{2} H^1(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i)$ (the meaning of this solution is specified in equations (7)(9)).*

Note présentée par

In order to prove this result, we first use the change (4) of unknown functions $\ell_i = G_i(k_i)$, where the functions G_i are defined by (3). Thus, system (1) is formally equivalent to the simpler system (5). Next, we introduce the spaces V_i by (6) and we observe that the equations for the velocities in (5) admits the formally equivalent variational formulation (7). We also define the operator $\mathcal{L}_i$ from $H^{-1}(\Omega_i)$ into $H^1_0(\Omega_i)$ by $\varphi_i = \mathcal{L}_i g_i$, where φ_i is the solution of (8). So, we can write a formulation by transposition of the equations of the turbulent kinetic energies, see (9). The system (7)(9) is the correct formulation of our problem. Note that it is possible to go back to the initial unknowns $(\boldsymbol{u}_i, p_i, k_i)$ thanks to (4) (see [1]), so that equations (7)(9) are formally equivalent to system (1).

The proof of Theorem 1 is performed by applying Schauder's fixed point theorem to the auxiliary problems (10)(11), and is a consequence of the three following assertions:
1) The mapping $\mathcal{T}$: $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2) \mapsto (\ell_1, \ell_2)$, where $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ is the solution of problem (10) and (ℓ_1, ℓ_2) is the solution of problem (11), is well-defined and continuous from $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ into itself.
2) There exists a positive constant M such that (12) holds for all pairs $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$ in $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$.
3) The image of $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ by the mapping $\mathcal{T}$ is compact in $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$.

The three assertions are briefly proved in Section 4 of the French version. We also refer to [1] for a slightly different proof of Theorem 1, based on Galerkin's approximation method, as well as for uniqueness results when the variations of the functions $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 2$, are small and for a further regularity result in the case of dimension $d = 2$ when the Ω_i, $1 \leq i \leq 2$, are convex polygons. The numerical analysis of discretizations of system (1) by spectral methods and finite elements is in progress.

---

1. Introduction

Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, que l'on suppose soit convexes soit de classe $\mathbf{C}^{1,1}$ et tels que l'interface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ soit contenue et ait une mesure positive dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$, et coïncide avec l'intersection de $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ avec cet hyperplan. On note Γ_i la partie de frontière $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$, $1 \leq i \leq 2$, et on introduit le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}_i$ sur Γ, orthogonal à Γ et extérieur à Ω_i. Le système suivant modélise l'écoulement stationnaire de deux fluides turbulents F_1 et F_2, où chaque fluide F_i occupe le domaine Ω_i, a une vitesse $\boldsymbol{u}_i$, une pression p_i et une énergie cinétique turbulente k_i:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\alpha_i(k_i)\,\nabla \boldsymbol{u}_i\right) + \mathbf{grad}\, p_i = \boldsymbol{f}_i & \text{dans } \Omega_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ -\mathrm{div}\left(\gamma_i(k_i)\,\nabla k_i\right) = \alpha_i(k_i)\,|\nabla \boldsymbol{u}_i|^2 & \text{dans } \Omega_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0} \quad \text{et} \quad k_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ \alpha_i(k_i)\,\partial_{n_i} \boldsymbol{u}_i - p_i\,\boldsymbol{n}_i + |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|\,(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma,\ 1 \leq i \neq j \leq 2, \\ k_i = |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 & \text{sur } \Gamma,\ 1 \leq i \leq 2, \end{cases} \tag{1}$$

Les fonctions α_i et γ_i, qui représentent des viscosités turbulentes, sont données et vérifient, pour une constante $\nu > 0$,

$$\begin{cases} \alpha_i \in \mathbf{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) & \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i(k) \geq \nu, & 1 \leq i \leq 2, \\ \gamma_i \in \mathbf{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) & \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \gamma_i(k) \geq \nu, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases} \tag{2}$$

Le problème (1) esquisse un modèle simplifié du système océan–atmosphère turbulent (voir par exemple [2] pour ce type de modélisation). Ici, les équations des deux fluides sont couplées grâce aux conditions d'entraînement figurant dans les cinquième et sixième lignes de (1): la première

traduit un couplage non turbulent et est étudiée dans [3], tandis que la seconde correspond au couplage des énergies cinétiques turbulentes. De ce fait, l'introduction et l'analyse du système (1) sont originales à notre connaissance.

Le but de cette Note est de démontrer le résultat qui suit.

Théorème 1. *Etant données des fonctions $\boldsymbol{f}_i$ dans $L^2(\Omega_i)^d$, $1 \leq i \leq 2$, le système* (1) *admet une solution $(\boldsymbol{u}_i, p_i, k_i)_{1\leq i\leq 2}$ dans $\prod_{i=1}^2 H^1(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i)$, au sens précisé dans la Section 2: $\boldsymbol{u}_i$ et ℓ_i sont solutions des équations* (7) *et* (9)*.*

Les sections suivantes sont consacrées à la démonstration de ce résultat, que nous effectuons ici en appliquant le théorème de point fixe de Schauder. Ce résultat est démontré plus en détail dans notre article [1], par une méthode légèrement différente basée sur l'approximation de Galerkin.

2. Transformation du système et formulation variationnelle

Les fonctions G_i, $1 \leq i \leq 2$, définies par

$$\forall k \in \mathbb{R}, \qquad G_i(k) = \int_0^k \gamma_i(\kappa)\, d\kappa, \tag{3}$$

sont de classe $\mathbf{C}^1$, lipschitziennes et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Elles admettent donc une fonction inverse G_i^{-1}. On effectue le changement d'inconnues:

$$\ell_i = G_i(k_i), \qquad 1 \leq i \leq 2. \tag{4}$$

Formellement, le système (1) s'écrit alors de façon équivalente, mais plus simple,

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\tilde{\alpha}_i(\ell_i)\,\nabla \boldsymbol{u}_i\right) + \mathbf{grad}\, p_i = \boldsymbol{f}_i & \text{dans } \Omega_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ -\Delta \ell_i = \tilde{\alpha}_i(\ell_i)\,|\nabla \boldsymbol{u}_i|^2 & \text{dans } \Omega_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0} \quad \text{et} \quad \ell_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i,\ 1 \leq i \leq 2, \\ \tilde{\alpha}_i(\ell_i)\,\partial_{n_i} \boldsymbol{u}_i - p_i\, \boldsymbol{n}_i + |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|\,(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma,\ 1 \leq i \neq j \leq 2, \\ \ell_i = G_i(|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2) & \text{sur } \Gamma,\ 1 \leq i \leq 2, \end{cases} \tag{5}$$

où les fonctions $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 2$, sont définies par $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i \circ G_i^{-1}$ et vérifient donc les mêmes propriétés (2) que les fonctions α_i.

Pour $1 \leq i \leq 2$, on introduit les espaces

$$V_i = \left\{ \boldsymbol{v}_i \in H^1(\Omega_i)^d;\ \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_i \text{ et } \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_i = 0 \text{ dans } \Omega_i \right\}. \tag{6}$$

Les équations sur les vitesses admettent la formulation variationnelle suivante, pour $1 \leq i \neq j \leq 2$:

trouver $\boldsymbol{u}_i$ dans V_i, $1 \leq i \leq 2$, tel que

$$\forall \boldsymbol{v}_i \in V_i, \quad \int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\ell_i)\, \nabla \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \boldsymbol{v}_i\, d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|\,(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) \cdot \boldsymbol{v}_i\, d\tau = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\, d\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

La formulation des équations sur les ℓ_i au sens de la transposition requiert l'introduction des opérateurs $\mathcal{L}_i$, $1 \leq i \leq 2$, qui à tout g_i dans $H^{-1}(\Omega_i)$ associent la solution $\varphi_i = \mathcal{L}_i g_i$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_i = g_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \varphi_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i; \end{cases} \tag{8}$$

elle s'écrit, pour $1 \leq i \leq 2$:

$$\begin{aligned} &\textit{trouver } \ell_i \textit{ dans } L^2(\Omega_i),\ 1 \leq i \leq 2, \textit{ tel que} \\ \forall g_i \in L^2(\Omega_i), \quad &\int_{\Omega_i} \ell_i\, g_i\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Gamma G_i(|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2)\, \partial_{n_i}(\mathcal{L}_i g_i)\, d\tau + \int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\ell_i)\, |\nabla \boldsymbol{u}_i|^2\, \mathcal{L}_i g_i\, d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{9}$$

On verra par la suite (première étape du paragraphe 4) que tous les termes figurant dans (9) ont un sens.

Pour toute solution $\boldsymbol{u}_i$ de (7), on peut prouver (voir [1]) l'existence d'une pression p_i de sorte que la première et cinquième lignes de (5) soient vérifiées. On peut également retourner des inconnues ℓ_i aux k_i par (4). Les équations (7)(9) sont formellement équivalentes à (5), et donc à (1).

3. Description de la démonstration

On considère les problèmes auxiliaires suivants: pour $\overline{\ell}_i$ donné dans $L^2(\Omega_i)$, pour $1 \leq i \neq j \leq 2$,

$$\begin{aligned} &\textit{trouver } \boldsymbol{u}_i \textit{ dans } V_i,\ 1 \leq i \leq 2, \textit{ tel que} \\ \forall \boldsymbol{v}_i \in V_i, \quad &\int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\overline{\ell}_i)\, \nabla \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \boldsymbol{v}_i\, d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|\, (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) \cdot \boldsymbol{v}_i\, d\tau = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\, d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{10}$$

puis

$$\begin{aligned} &\textit{trouver } \ell_i \textit{ dans } L^2(\Omega_i),\ 1 \leq i \leq 2, \textit{ tel que} \\ \forall g_i \in L^2(\Omega_i), \quad &\int_{\Omega_i} \ell_i\, g_i\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Gamma G_i(|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2)\, \partial_{n_i}(\mathcal{L}_i g_i)\, d\tau + \int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\overline{\ell}_i)\, |\nabla \boldsymbol{u}_i|^2\, \mathcal{L}_i g_i\, d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{11}$$

où $\boldsymbol{u}_i$ est la solution de (10).

La démonstration du Théorème 1 s'effectue en trois étapes. On prouve que:
1) L'application $\mathcal{T}$ qui à $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$ associe la solution (ℓ_1, ℓ_2) du problème (10)(11) est définie et continue de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ dans lui-même.
2) Il existe une constante M telle que, pour tout couple $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$ de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, on ait:

$$||\mathcal{T}(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)||_{L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)} \leq M. \tag{12}$$

3) L'image de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ par l'application $\mathcal{T}$ est compacte dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$.
En effet, si ces propriétés sont vérifiées, le théorème de Schauder implique que l'application $\mathcal{T}$ admet un point fixe, ce qui termine la preuve du Théorème 1.

Dans la suite, on explique successivement comment démontrer ces trois propriétés.

4. Les trois étapes de la démonstration

Première étape On démontre d'abord que, pour $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$ donné dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, il existe une unique solution $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ de (10) et que l'application: $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2) \mapsto (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ est continue de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ dans $V_1 \times V_2$.

L'existence d'une solution du problème (10) repose sur une estimation *a priori* de la solution. En prenant chaque $\boldsymbol{v}_i$ égal à $\boldsymbol{u}_i$ dans (10), en sommant sur i, en observant que le terme intégré sur Γ est positif et en utilisant l'inégalité de Poincaré–Friedrichs, on obtient

$$||\boldsymbol{u}_1||_{H^1(\Omega_1)^d} + ||\boldsymbol{u}_2||_{H^1(\Omega_2)^d} \leq \frac{c}{\nu} \left(||\boldsymbol{f}_1||_{L^2(\Omega_1)^d} + ||\boldsymbol{f}_2||_{L^2(\Omega_2)^d} \right). \tag{13}$$

L'existence de la solution est alors une conséquence de la méthode de compacité; en effet, en utilisant la compacité de l'injection de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^3(\Gamma)$ pour $d=2$ et 3, on vérifie immédiatement que la limite faible d'une sous-suite d'approximations de solutions de (10) obtenues par exemple par la méthode de Galerkin converge vers une solution de (10).

On vérifie l'unicité de la solution du problème (10) de la façon suivante: si $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ et $(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2)$ sont deux solutions de (10), leur différence vérifie

$$\begin{aligned} &c\nu \left(\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}'_1\|^2_{H^1(\Omega_1)^d} + \|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}'_2\|^2_{H^1(\Omega_2)^d} \right) \\ &\quad + \int_\Gamma \left(|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2| \, (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) - |\boldsymbol{u}'_1 - \boldsymbol{u}'_2| \, (\boldsymbol{u}'_1 - \boldsymbol{u}'_2) \right) \cdot \left((\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) - (\boldsymbol{u}'_1 - \boldsymbol{u}'_2) \right) d\tau = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

et, comme on a $(|\lambda| \, \lambda - |\lambda'| \, \lambda') \, (\lambda - \lambda') \geq 0$ pour tous les réels λ et λ', on en déduit que $(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}'_1)$ et $(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}'_2)$ sont nuls.

Pour prouver la continuité de l'application: $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2) \mapsto (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, on considère une suite $(\overline{\ell_1^n}, \overline{\ell_2^n})_n$ qui converge vers $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$ dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, et on note $(\boldsymbol{u}_1^n, \boldsymbol{u}_2^n)$ la solution de (10) correspondante. La suite $(\boldsymbol{u}_1^n, \boldsymbol{u}_2^n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega_1)^d \times H^1(\Omega_2)^d$ d'après (13) et admet donc une sous-suite, encore notée $(\boldsymbol{u}_1^n, \boldsymbol{u}_2^n)_n$, qui converge faiblement dans $H^1(\Omega_1)^d \times H^1(\Omega_2)^d$ vers la solution $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ de (10) correspondant à $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$. On déduit de la propriété d'unicité que toute la suite converge. En prenant $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i^n$ dans l'équation (10) relative à $\boldsymbol{u}_i^n$, puis $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i$ dans l'équation (10) relative à $\boldsymbol{u}_i$, et en utilisant à nouveau la compacité de l'injection de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^3(\Gamma)$, on obtient

$$\lim_n \int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\overline{\ell_i^n}) \, \nabla \boldsymbol{u}_i^n \cdot \nabla \boldsymbol{u}_i^n \, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\overline{\ell}_i) \, \nabla \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x}, \qquad 1 \leq i \leq 2, \tag{15}$$

d'où la convergence forte de la suite $(\boldsymbol{u}_1^n, \boldsymbol{u}_2^n)_n$ vers $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ dans $H^1(\Omega_1)^d \times H^1(\Omega_2)^d$.

On considère maintenant l'équation (11). Comme les ouverts Ω_i, $1 \leq i \leq 2$, sont convexes ou de classe $\mathbf{C}^{1,1}$, pour tout g_i dans $L^2(\Omega_i)$, la fonction $\mathcal{L}_i g_i$ définie par (8) appartient à $H^2(\Omega_i)$ et vérifie

$$\|\mathcal{L}_i g_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq c \, \|g_i\|_{L^2(\Omega_i)}. \tag{16}$$

On utilise la majoration: $|G_i(k)| \leq c \, |k|$, valable pour tout réel k et les injections de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^3(\Gamma)$ et de $H^2(\Omega_i)$ dans $L^\infty(\Omega_i)$ (en dimension $d=2$ et 3) pour déduire de (16) la majoration

$$\begin{aligned} \Big| - \int_\Gamma G_i(|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2) \, \partial_{n_i}(\mathcal{L}_i g_i) \, d\tau + \int_{\Omega_i} \tilde{\alpha}_i(\overline{\ell}_i) \, |\nabla \boldsymbol{u}_i|^2 \, \mathcal{L}_i g_i \, d\boldsymbol{x} \Big| \\ \leq c \left(\|\boldsymbol{u}_1\|^2_{H^1(\Omega_1)^d} + \|\boldsymbol{u}_2\|^2_{H^1(\Omega_2)^d} \right) \|\boldsymbol{g}_i\|_{L^2(\Omega_i)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Comme, pour $1 \leq i \leq 2$, le second membre de (11) est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega_i)$, l'équation (11) admet une solution unique.

La continuité de l'application: $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2) \mapsto (\ell_1, \ell_2)$ de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ est facile à démontrer à partir de la continuité de l'application: $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2) \mapsto (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ dans $H^1(\Omega_1)^d \times H^1(\Omega_2)^d$ et de la continuité des injections de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^3(\Gamma)$ et de $H^2(\Omega_i)$ dans $L^\infty(\Omega_i)$.

Deuxième étape En prenant g_i égal à ℓ_i dans (11), on déduit de (17) que, pour $1 \leq i \leq 2$,

$$\|\ell_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c \left(\|\boldsymbol{u}_1\|^2_{H^1(\Omega_1)^d} + \|\boldsymbol{u}_2\|^2_{H^1(\Omega_2)^d} \right). \tag{18}$$

En combinant cette estimation avec (13), on obtient:

$$\|\mathcal{T}(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)\|_{L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)} \leq \frac{c}{\nu^2} \left(\|\boldsymbol{f}_1\|^2_{L^2(\Omega_1)^d} + \|\boldsymbol{f}_2\|^2_{L^2(\Omega_2)^d} \right), \tag{19}$$

c'est-à-dire la majoration (12).

TROISIÈME ÉTAPE Soit maintenant $(\overline{\ell_1^n}, \overline{\ell_2^n})_n$ une suite de fonctions de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$. On veut montrer que la suite $(\ell_1^n, \ell_2^n)_n$ définie par: $(\ell_1^n, \ell_2^n) = \mathcal{T}(\overline{\ell_1^n}, \overline{\ell_2^n})$ admet une sous-suite fortement convergente dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$.

On introduit d'abord la suite $(\boldsymbol{u}_1^n, \boldsymbol{u}_2^n)_n$ associée à $(\overline{\ell_1^n}, \overline{\ell_2^n})_n$ par (10) et on note que, d'après (13), elle est bornée dans $H^1(\Omega_1)^d \times H^1(\Omega_2)^d$. Comme les fonctions $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 2$, sont aussi bornées, chaque suite $(\tilde{\alpha}_i(\overline{\ell_i^n})\,|\nabla \boldsymbol{u}_i^n|^2)_n$, $1 \leq i \leq 2$, est bornée dans $L^1(\Omega)$ et admet donc une sous-suite convergeant vaguement vers une mesure μ_i^*. De même, chaque suite $(G_i(|\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n|^2))_n$ est bornée dans $L^2(\Gamma)$ et admet une sous-suite convergeant faiblement dans $L^2(\Gamma)$ vers une fonction h_i^*.

Puisque la suite $(\ell_1^n, \ell_2^n)_n$ est bornée d'après (19), elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ vers un couple (ℓ_1^*, ℓ_2^*) vérifiant pour $1 \leq i \leq 2$

$$\forall g_i \in L^2(\Omega_i), \quad \int_{\Omega_i} \ell_i^*\, g_i\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Gamma h_i^*\, \partial_{n_i}(\mathcal{L}_i g_i)\, d\tau + \int_{\Omega_i} \mathcal{L}_i g_i\, d\mu_i^*. \tag{20}$$

Finalement, en prenant g_i égal à ℓ_i^n dans l'équation (11) satisfaite par ℓ_i^n et en utilisant la compacité des injections de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^3(\Gamma)$ et de $H^2(\Omega_i)$ dans $\mathbf{C}^0(\overline{\Omega}_i)$, on montre la convergence des normes, qui implique la convergence forte de la sous-suite $(\ell_1^n, \ell_2^n)_n$ dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$.

Remarque: Par des arguments analogues à ceux utilisés dans les deux premières étapes, on peut également prouver que, pour tout s, $0 < s < \frac{1}{2}$, il existe une constante M_s telle que, pour tout couple $(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)$ de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, on a

$$\|\mathcal{T}(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)\|_{H^s(\Omega_1)\times H^s(\Omega_2)} \leq M_s. \tag{21}$$

La compacité de l'image de $\mathcal{T}$ dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ est alors une conséquence immédiate de la compacité de l'injection de $H^s(\Omega_i)$ dans $L^2(\Omega_i)$, $1 \leq i \leq 2$.

Remarque: On réfère à [1] pour des résultats d'unicité de la solution de (7)(9) (et donc du système (1)) lorsque les variations des fonctions $\tilde{\alpha}_i$ sont suffisamment petites et, sous ces mêmes hypothèses, pour des propriétés de régularité en dimension $d = 2$, lorsque les Ω_i sont des polygones convexes. L'analyse numérique de discrétisations du système (1) par méthodes spectrales et par éléments finis est en cours, ainsi que l'étude du problème d'évolution.

Références bibliographiques

[1] Bernardi C., Chacon T., Lewandowski R., Murat F., A model for two coupled turbulent fluids, Part I: analysis of the system, à paraître.

[2] Lewandowski R., *Analyse mathématique et océanographie*, Collection "Recherches en Mathématiques Appliquées", Masson (1997).

[3] Lions J.-L., Temam R., Wang S., Models for the coupled atmosphere and ocean, *Computational Mechanics Advances* **1** (1993), 1–120.