HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

MÉMOIRE DE SYNTHÈSE

SUR QUELQUES MODÈLES DE TURBULENCE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES ET EN OCÉANOGRAPHIE

Roger LEWANDOWSKI

I — INTRODUCTION

I. 1 — ORIENTATION

Ce mémoire est la synthèse de travaux et résultats obtenus par l'auteur depuis l'année 1993 sur le thème de la turbulence en mécanique des fluides et en océanographie.
Ces travaux consistent dans l'analyse mathématique d'un système turbulent de base, la modélisation et l'analyse mathématique de systèmes pouvant intervenir dans la simulation numérique des écoulements turbulents en océanographie. Les résultats les plus significatifs sont rédigés dans un livre paru dans la collection RMA (Masson éditeur) avec pour titre

Analyse mathématique et océanographie

(voir LEWANDOWSKI [6]) et dans un article publié dans Nonlinear Analysis TMA intitulé

"The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity", (*cf.* LEWANDOWSKI [3]).

Les principales contributions dans ces travaux sont :

1) existence de solutions faibles au système de turbulence couplant la vitesse, la pression et l'énergie cinétique turbulente,
2) étude du modèle $(k-\varepsilon)$, modélisation et étude d'un système alternatif au système $(k-\varepsilon)$ appelé le système (θ,φ),
3) étude de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente verticale en océanographie avec la tension du vent,
4) étude du système de turbulence océanique TKE utilisé au LODYC,
5) modélisation et existence de solutions faibles à un système alternatif de turbulence océanique couplant la vitesse barotrope, la densité, l'énergie cinétique turbulente et la pression superficielle,
6) modélisation et analyse d'un système stationnaire linéarisé d'équations primitives pour l'océan avec des termes de pression additionnels.

Avant de donner le plan précis de ce mémoire, on fait dans la section suivante quelques commentaires sur les méthodes générales utilisées pour l'obtention des systèmes étudiées et des résultats d'existence de solutions.

I. 2 — LES MÉTHODES GÉNÉRALES

1) *Sur la modélisation* — On a essayé dans cet ensemble de travaux de rendre claire, autant que possible, la modélisation des systèmes d'équations aux dérivées partielles introduits et analysés (*cf.* par exemple les chapitres 1 et 3 dans LEWANDOWSKI [6], LEWANDOWSKI-MOHAMMADI [1], LEWANDOWSKI [1], [2] et [8]), même lorsque ceux-ci étaient déjà connus par ailleurs (comme par exemple le système des équations primitives pour l'océan, les conditions aux limites en surface, la modélisation de la turbulence verticale dans l'océan....). La modélisation consiste à chercher des équations aux dérivées partielles pour les variables physiques étudiées avec des conditions aux limites appropriées. Ce travail se fait à partir de lois physiques, de faits expérimentaux connus, de lois d'échelles et d'analyse dimensionnelle.
La contribution de l'auteur dans la modélisation réside principalement en la recherche de modèles de turbulence alternatifs, motivée par la remise en question d'approximations usuelles et/ou par le fait que certains systèmes utilisés pour des simulations numériques sont connus pour être numériquement instables et on ne sait pas si ces derniers ont des solutions faibles (voir par exemple le système $(k-\varepsilon)$ plus loin, ou encore le système TKE du LODYC utilisé pour simuler la turbulence verticale dans l'océan). On déduit à partir de systèmes existants ou de lois physiques des systèmes filtrés obtenus à partir

- de changement de variables dans les équations de base (*cf.* par exemple le système (θ, φ) déduit du modèle (k, ε)),
- d'approximations issues d'analyses d'échelles et de moyennisation (*cf.* par exemple le système géostrophico-barotrope turbulent (GBT)),
- de manipulations formelles sur les équation de la physique et la prise en compte de termes habituellement négligés (*cf.* le système océanique avec des termes de pression additionnels (EPP) plus loin).

2) *Sur l'analyse mathématique* — On analyse les systèmes principalement à l'aide de la méthode de compacité (*cf.* LIONS [1]), ce qui consiste dans un premier temps à chercher des estimations a priori déduites d'égalités d'énergie ou de techniques d'interpolation puis passer à la limite dans les équations pour des suites de solutions approchées. On démontre des résultats d'existence de solutions faibles ou renormalisées, des résultats d'unicité lorsque cela est possible et on essaie de déterminer certaines des propriétés qualitatives des solutions pouvant correspondre à ce que l'on peut attendre des variables physiques de base (régularité, signe....). D'une manière générale, le programme qui conduit aux résultats obtenus est le suivant :

i) on détermine les espaces fonctionnels avec lesquels on travaille et on donne un sens aux équations,
ii) on obtient des estimations a priori,
iii) on construit des approximations,
iv) on passe à la limite dans les équations.

Parfois, on ne peut pas appliquer ce programme tel quel. C'est le cas lorsqu'interviennent des termes de pressions dans les équations de moment qui ne sont plus uniquement des multiplicateurs de Lagrange pour des contraintes d'incompressibilité. On fait alors apparaître la pression comme le point fixe d'une application (*cf.* le système géostrophico-barotrope turbulent (GBT) par exemple).

I. 3 — PLAN DU MÉMOIRE

La suite de ce mémoire est divisé en deux parties. La première traite des systèmes turbulents de base et la deuxième des modèles intervenant en océanographie. Le plan est le suivant :

II. SYSTÈMES TURBULENTS DE BASE

II. 1 — Couplage des équations de Stokes et de Navier-Stokes avec l'énergie cinétique turbulente
II. 2 — Obtention du modèle (θ, φ) à partir du modèle (k, ε) : modélisation et résultat d'existence pour un système couplé
II. 3 — Remarques additionnelles sur le système (k, ε)
II. 4 — Cas de viscosités turbulentes non bornées

III. SYSTÈMES INTERVENANT EN OCÉANOGRAPHIE

III. 1 — Généralités sur l'océanographie
III. 2 — Sur l'énergie cinétique turbulente avec la tension du vent
III. 3 — Étude du système de turbulence océanique TKE
III. 4 — Le système géostrophico-barotrope turbulent : modélisation et résultats d'existence
III. 5 — Système d'équations primitives avec des termes de pression additonnels

Au fur et à mesure de l'énoncé des résultats, on mentionne les problèmes ouverts et les perspectives de recherche.

REMERCIEMENTS — Je remercie vivement les Professeurs
T. CHACON pour les discussions que nous avons eues et pour avoir accepté d'être rapporteur de cette habilitation,
J.-Y. CHEMIN pour les discussions que nous avons eues et sa présence dans le jury,
P.-G. CIARLET pour tout ses conseils et qui a accepté de se joindre au jury,
P. DELECLUSE qui m'a enseigné beaucoup d'océanographie et qui est présente dans ce jury,
T. GALLOUËT pour les discussions que nous avons eues et pour avoir accepté d'être rapporteur,
P. GERARD qui a accepté d'être rapporteur,
J.-L. LIONS qui a guidé et orienté mes recherches ces dernières années et qui préside ce jury,
F. MURAT qui m'a appris à faire tendre n vers l'infini et ε vers zéro,
O. PIRRONEAU qui m'a suggéré un jour d'étudier le système (k, ε) et qui se joint au jury.

Enfin, je remercie l'équipe MODAL'X de Nanterre pour son soutien et plus particulièrement le professeur P. CATTIAUX.

II — SYSTÈMES TURBULENTS DE BASE

II. 1 — COUPLAGE DE L'ÉQUATION POUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE AVEC LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

1) *Orientation* — On veut décrire un écoulement à grande échelle avec une vitesse et une pression moyennes ou macroscopiques. On note

- v la vitesse du fluide,
- p sa pression

et on pose

$$v = \overline{v} + v', \quad p = \overline{p} + p',$$

où v' et p' sont les fluctuations autour des valeurs moyennes $\overline{v}$ et $\overline{p}$. Quand on cherche à partir des équations de Navier-Stokes une équation pour $(\overline{v}, \overline{p})$, ce que l'on appelle le problème de Reynolds, on voit apparaître la divergence du tenseur de Reynolds

$$R = \overline{v' : v'}.$$

Ce terme est physiquement interprété comme le terme responsable du transfer d'énergie des grandes échelles vers l'échelle dissipative de la turbulence. De ce point de vue, il est modélisé par une diffusion, ce qui conduit à poser

$$R = -\nu_t \nabla \overline{v},$$

où ν_t est une viscosité turbulente. On considère dans les modèles de fermeture d'ordre 1 que ν_t ne dépend que de l'énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2}\overline{|v'|^2},$$

la moyenne de l'énergie cinétique de la fluctuation, une quantité macroscopique. Après modélisation (*cf.* PIRONNEAU-MOHAMMADI [1]), on obtient le système $(S1)$ posé dans $Q = [0, \mathcal{T}] \times \Omega$, où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{T} > 0$ est fixé, $N = 2, 3$,

$$(S1) \quad \begin{cases} (1) & \partial_t \overline{v} + (\overline{v}.\nabla)\overline{v} + \nabla p - div\left(\nu_t^1(k)\nabla\overline{v}\right) = f, \\ (2) & div(\overline{v}) = 0, \\ (3) & \partial_t k + \overline{v}.\nabla k - div\left(\nu_t^2(k)\nabla k\right) = \nu_t^1(k)\left|\nabla\overline{v}\right|^2 - k|k|^{\frac{1}{2}}, \\ (4) & \overline{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \overline{v}|_{t=0} = \overline{v}_0, \quad k|_{t=0} = k_0. \end{cases}$$

Les fonctions ν_t^i $(i = 1, 2)$ sont les viscosités turbulentes. Elles sont continues par rapport à k et minorées par $\nu > 0$, où ν est la viscosité moléculaire du fluide. D'une manière générale

$$\nu_t^i = C_i\sqrt{k} + \nu,$$

où C_i est une constante positive sans dimension. Les constantes physiques positives ont été rendues égales à 1, les constantes physiques négatives ont été rendues égales à -1 et ce, sans changer la structure mathématiques du problème. La question des conditions aux limites pose souvent beaucoup de difficultés (*cf.* les discussions sur ce sujet dans LEWANDOWSKI [6], chapitres 1 et 3). Dans ce mémoire, on choisit des conditions de Dirichlet homogènes pour simplifier le problème.
Le sous-système $(1), (2)$ est le système des équations de Navier-Stokes, l'équation (3) est l'équation de fermeture. Les équations de Navier-Stokes sont couplées à l'équation pour k par l'intermédiaire des viscosités turbulentes.

2) *Résultats principaux* — Dans le système $(S1)$ on distingue deux difficultés principales dues à

- à la présence des viscosités turbulentes,
- la nature du second membre dans l'équation pour k qui est naturellement dans L^1.

On montre dans LEWANDOWSKI [3], [4] un résultat d'existence d'une solution faible au système $(S1)$ dans le cas $N = 2$ (cas bidimensionnel). Le cas tridimensionnel est plus délicat. On obtient des résultats d'existence dans le cas stationnaire et le cas linéarisé, c'est-à-dire pour les systèmes qui suivent.

• Équation de Navier-Stokes stationnaire 3D,

$$(S1 - \text{stat}) \quad \begin{cases} (1) & (\overline{v}.\nabla)\overline{v} + \nabla p - div\left(\nu_t^1(k)\nabla\overline{v}\right) = f, \\ (2) & div(\overline{v}) = 0, \\ (3) & \overline{v}.\nabla k - div\left(\nu_t^2(k)\nabla k\right) = \nu_t^1(k)\left|\nabla\overline{v}\right|^2 - k|k|^{\frac{1}{2}}, \\ (4) & \overline{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

• Équation de Stokes 3D,

$$(S1-\text{lin}) \quad \begin{cases} (1) & \partial_t \overline{v} + \nabla p - div\left(\nu_t^1(k)\nabla\overline{v}\right) = f, \\ (2) & div(\overline{v}) = 0, \\ (3) & \partial_t k - div\left(\nu_t^2(k)\nabla k\right) = \nu_t^1(k)\,|\nabla\overline{v}|^2 - k|k|^{\frac{1}{2}}, \\ (4) & \overline{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \overline{v}|_{t=0} = \overline{v}_0, \quad k|_{t=0} = k_0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on fait l'hypothèse importante :

(H.II.1) *la viscosité ν_t^1 est une fonction bornée de k.*

Dans la suite, on note

$$\mathcal{E} = \left\{v \in (C_c^\infty(\Omega))^N,\, divv = 0\right\},$$

H et V l'adhérence de $\mathcal{E}$ dans $(L^2(\Omega)^N$ et $(H_0^1(\Omega))^N$ respectivement. Enfin, N' est le conjugué de N et T_n la fonction de troncature à hauteur n (***i.e.*** $T_n(x) = x$ si $|x| \le n$, $T_n(x) = (x/|x|)n$ si $|x| > n$) .
On énonce à présent les principaux résultats.

THÉORÈME II. 1 (Équation de Navier-Stokes stationnaire, $(S1-\text{stat})$) — *Soit $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ ($N = 2, 3$). On suppose que*

- *ν_t^1 est continue bornée et minorée par $\nu > 0$,*
- *ν_t^2 est continue et minorée par $\nu > 0$.*

Il existe

$$(\overline{v}, k) \in V \times \bigcap_{q<N'} W_0^{1,q}(\Omega)$$

satisfaisant

$$\forall n \in I\!N, \quad T_n(k) \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{et} \quad \frac{1}{n}\int_{n\le|k|\le 2n} |\nabla k|^2 \to 0, \quad \textit{quand } n \to \infty$$

et tel que pour tout $h \in C_c^1(I\!R)$ pour tout $(v, \varphi) \in V \times \left(H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)$, on ait

$$(II.1) \quad \int_\Omega (\overline{v}.\nabla)\overline{v}.v + \int_\Omega \nu_t^1(k)\nabla\overline{v} : \nabla v = \langle f, v\rangle,$$

$$(II.2) \quad \int_\Omega h(k)\nu_t^2(k)\nabla k.\nabla\varphi + \int_\Omega (\nu_t^2(k)h'(k)|\nabla k|^2 + h(k)\overline{v}.\nabla k)\varphi = \int_\Omega h(k)\varphi\left(\nu_t^1(k)|\nabla\overline{v}|^2 - k|k|^{\frac{1}{2}}\right).$$

♢

THÉORÈME II. 2 (Équation de Stokes d'évolution $(S1-\text{lin})$) — *Soient*

$$f \in L^2([0,T],(H^{-1}(\Omega))^N), \quad (N = 2, 3)$$

$(\overline{v}^0, k^0) \in H \times L^1(\Omega)$. *On suppose que*

- *ν_t^1 est continue bornée et minorée par $\nu > 0$,*
- *ν_t^2 est continue et vérifie l'hypothèse de croissance*

$$0 < \nu \le \nu_t^2(k) \le C(1 + |k|)^\alpha$$

avec $\alpha < 1/(N-2)$.

Il existe

$$\begin{cases} \overline{v} \in \left(L^2([0,T],V) \cap L^\infty([0,T],H)\right) \\ k \in \left(L^q([0,T],W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^\infty([0,T],L^1(\Omega))\right), \end{cases}$$

pour tout $q < N'$*, avec* $\partial_t \overline{v} \in L^2([0,T], V')$*,* $(\overline{v}, k)|_{t=0} = (\overline{v}^0, k^0)$ *et tel que pour tout* $(v, \varphi) \in V \times C_c^2(Q)$ *on ait*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \overline{v}.v + \int_\Omega \nu_t^1(k)\nabla\overline{v} : \nabla v = \langle f, v\rangle\,, \tag{II.3}$$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nu_t^2(k)\nabla k.\nabla\varphi - k.\partial_t\varphi) = \int_0^T \int_\Omega \varphi\left(\nu_t^1(k)|\nabla u|^2 - k|k|^{\frac{1}{2}}\right), \tag{II.4}$$

où $(II.3)$ *a lieu dans* $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}])$*.* ♢

Théorème II. 3 (Équation de Navier-Stokes d'évolution bidimensionnelle $(S1)$, $N = 2$) — *On suppose* $N = 2$*. Soient*

$$f \in L^2([0,T], (H^{-1}(\Omega))^2),$$

$(\overline{v}^0, k^0) \in H \times L^1(\Omega)$*. On suppose que*

- ν_t^1 *est continue bornée et minorée par* $\nu > 0$*,*
- ν_t^2 *est continue et vérifie l'hypothèse de croissance*

$$0 < \nu \leq \nu_t^2(k) \leq C(1 + |k|)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Il existe

$$\begin{cases} \overline{v} \in \left(L^2([0,T], V) \cap L^\infty([0,T], H)\right), \\ k \in \left(L^q([0,T], W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^\infty([0,T], L^1(\Omega))\right), \end{cases}$$

pour tout $q < 2$*, avec* $\partial_t \overline{v} \in L^2([0,T], V')$*,* $(\overline{v}, k)|_{t=0} = (\overline{v}^0, k^0)$*, tel que tout* $(v, \varphi) \in V \times C_c^2(Q)$*, on ait*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \overline{v}.v + \int_\Omega (\overline{v}\nabla)\overline{v}.v + \int_\Omega \nu_t^1(k)\nabla\overline{v} : \nabla v = \langle f, v\rangle\,, \tag{II.5}$$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nu_t^2(k)\nabla k.\nabla\varphi - k.\partial_t\varphi - \overline{v}.\nabla\varphi k) = \int_0^T \int_\Omega \varphi\left(\nu_t^1(k)|\nabla u|^2 - k|k|^{\frac{1}{2}}\right), \tag{II.6}$$

où $(II.5)$ *a lieu dans* $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}])$*.* ♢

La démonstration de ces trois résultats est basée sur le même principe et articulée en trois étapes :

- construction d'approximations
- estimations a priori
- passage à la limite dans les équations

- Les approximations sont obtenues en tronquant le second membre de l'équation pour k et les viscosités turbulentes lorsqu'elles ne sont pas bornées. On applique ensuite une méthode de point fixe (cas stationnaire) ou encore une méthode de temps de retard (cas d'évolution) pour obtenir une solution au problème tronqué.
- Les estimations naturelles montrent que le second membre de l'équation (3) pour k sont dans un espace de type L^1, à cause du terme $\nu_t^1(k)|\nabla\overline{v}|^2$. On estime k dans des espaces $W^{1,p}$ pour $p < N'$ grâce aux techniques d'interpolation de Boccardo-Gallouët [1] (rerédigé en détail dans la section 4.2.2 du chapitre 4 dans Lewandowski [6]). La variable $\overline{v}$ est estimée par les techniques habituelles d'énergie.
- On passe à la limite dans les équations à partir des approximations. Le point délicat est le passage à la limite dans le terme $\nu_t^1(k)|\nabla\overline{v}|^2$. On utilise pour cela une égalité d'énergie dans l'équation pour $\overline{v}$ (une

égalité dont on ne dispose pas dans le cas tridimensionnel non linéaire). L'hypothèse "ν_t^1 bornée" joue un rôle crucial dans ce point précis de la démonstration. ♢

Quelques commentaires s'imposent au sujet de ces résultats.

1) Dans les trois énoncés qui précèdent, la pression est absente de la formulation faible de l'équation pour $\overline{v}$ qui suit la formulation classique de Leray-Lions. Dans cette formulation, ∇p est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'incompressibilté $div(\overline{v}) = 0$, c'est-à-dire que pour tout champ de vecteurs incompressible v, $< v, \nabla p >= 0$. En appliquant le théorème de De-Rham, on sait que lorsque une distribution F est telle que $< F, v >= 0$ pour tout champ de vecteurs incompressible, il existe une distribution p telle que $F = \nabla p$. Par conséquent, on établit à partir de ces formulations faibles l'existence d'une pression p de sorte que le système $(S1)$ (dans ses versions stationnaires, linéarisées ou bidimensionnelles pour l'équation du fluide) soit satisfaite. La régularité de p est établie à partir des estimations de Neças (*cf.* les détails et les références dans LEWANDOWSKI [3]).

2) Dans le théorème II. 1, l'équation pour k a lieu au sens renormalisé suivant Di Perna-Lions. Dans les deux autres énoncés, elle a lieu au sens des distributions moyennant une hypothèse de croissance sur ν_t^2. Bien sûr, si on ne fait aucune hypothèse de croissance sur ν_t^2, on a des résultats analogues avec une formulation renormalisée pour k.

3) D'autres auteurs ont obtenu indépendamment des résultats du même ordre sur des modèles possèdant des structures voisines issues d'autres problèmes de physique (*cf.* GALLOUËT-HERBIN [1], CLAIN [1], BAGANGER-MIKELIC [1]).

4) Dans ces résultats, on suppose que ν_t^1 est une fonction bornée de k ce qui n'est pas le cas dans les modèles physiques. On a quelques résultats partiels lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite (*cf.* la section II. 4).

5) Il est assez facile de vérifier que la solution k demeure positive dans les cas d'évolution lorsque la donnée initiale k_0 est positive (*cf.* LEWANDOWSKI [3], chapitre 4).

6) Le système complet d'évolution non linéaire $(S1)$ dans le cas de la dimension 3 est un problème ouvert. On ne sait pas s'il existe une solution faible à ce système. On obtient dans LEWANDOWSKI [3] un résultat partiel sur les suites de solutions. On montre que les équations (1) et (2) sont préservées en passant à la limite, mais une mesure positive apparaît dans le second membre de l'équation pour k dont on ne sait dire si elle est nulle ou non.

II. 2 — OBTENTION DU MODÈLE $\theta - \varphi$ À PARTIR DU MODÈLE (k, ε)

1) *Modélisation* — Quand on veut raffiner la description de la turbulence, on utilise la dissipation turbulente définie par

$$\varepsilon = \nu \overline{|\nabla v' + (\nabla v')^t|^2}.$$

On suppose que les viscosités turbulentes dépendent de k et de ε. Une analyse dimensionnelle montre que

$$\nu_t = \nu_t(k, \varepsilon) = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

où $c_\mu = 0,09$ est une constante sans dimension. Le système (k, ε) s'écrit

$$(k,\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t k + \overline{v}\nabla k - div\,(\nu_t \nabla k) = \nu_t |\nabla \overline{v} + \nabla \overline{v}^T|^2 - \varepsilon, \\ \partial_t \varepsilon + \overline{v}\nabla \varepsilon - div\,(\nu_t \nabla \varepsilon) = c_2 k |\nabla \overline{v} + \nabla \overline{v}^T|^2 - c_3 \dfrac{\varepsilon^2}{k}, \end{cases}$$

$c_2 = 0.129$, $c_3 = 1.92$ sont des constantes sans dimension. Les conditions aux bord du domaine sont établies à partir de "lois de paroi" (*cf.* PIRONNEAU-MOHAMMADI [1])]). Pour simplifier, on prend des conditions de

Dirichlet au bord (ce qui est en fait beaucoup plus compliqué dans la réalité). Le système (k,ε) est un des systèmes de base pour simuler numériquement des écoulements turbulents. Sur le plan mathématique, on étudie le système (k,ε) sous la forme simplifiée

$$(k,\varepsilon)\quad \begin{cases} \partial_t k + \overline{v}\nabla k - div\,(\nu_t \nabla k) = \nu_t |\nabla \overline{v}|^2 - \varepsilon, \\ \partial_t \varepsilon + \overline{v}\nabla \varepsilon - div\,(\nu_t \nabla \varepsilon) = k|\nabla \overline{v}|^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

et ce, sans changer la structure du problème. Deux remarques s'imposent au sujet de ce système :

1) il est connu pour être numériquement instable,
2) on ne dispose d'aucun résultat d'existence, même lorsque l'on fixe $\overline{v}$, car on ne connait aucune estimation a priori pour k et ε, ce qui est un problème ouvert.

C'est pourquoi on introduit un système numérique alternatif. Dans LEWANDOWSKI-MOHAMMADI [1], on fait le changement de variables

$$\theta = \frac{k}{\varepsilon}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon^2}{k^3}.$$

Après un travail de modélisation qui consiste principalement à négliger les termes d'ordre 2 et plus issus de la diffusion, on obtient comme système

$$(\theta,\varphi)\quad \begin{cases} \partial_t \theta + \overline{v}.\nabla\theta - div\,(\nu_t \nabla \theta) = -|\nabla \overline{v}|^2\theta^2 + 1, \\ \partial_t \varphi + \overline{v}.\nabla\varphi - div\,(\nu_t \nabla \varphi) = -\varphi\left(\theta|\nabla \overline{v}|^2 + \dfrac{1}{\theta}\right). \end{cases}$$

Dans ce système, les constantes positives ont été rendues égales à 1, les constantes négatives égales à -1 sans changer la structure mathématique du problème. On prend comme condition aux limites des conditions de Dirichlet

$$\theta|_{\partial\Omega} = a \geq 0, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = b \geq 0,$$

où a et b sont des constantes. La viscosité turbulente ν_t devient

$$\nu_t = \frac{1}{\theta\varphi},$$

que l'on remplace en général par

$$\frac{1}{\theta\varphi + r}, \quad r > 0.$$

Les détails de cette modélisation sont repris dans LEWANDOWSKI [1], [2].

2) *Analyse mathématique* — Dans LEWANDOWSKI-MOHAMMADI [1] et LEWANDOWSKI [1], [2], le système (θ,φ) est largement étudié pour un champ $\overline{v}$ fixé. On y établi la liste des estimations a priori pour les variables (θ,φ), leur régularité, leur positivité, leur taux de monotonie exponentielle en fonction du temps le tout en fonction des données initiales θ_0 et φ_0. Il résulte de ces résultats qu'à l'instar du système (k,ε), le système (θ,φ) est un système parabolique qui dispose "de bonnes propriétés".
Dans MARMOL-ORTEGON [1], les auteurs établissent un résultat d'existence d'une solution du problème couplé (θ,φ) avec les équations de Stokes (équation de fluide linéarisées) lorsque les données initiales θ_0 et φ_0 sont positives et dans $L^\infty(\Omega)$.
Actuellement, le résultat le plus significatif sur ce problème est le théorème II.4 plus bas (*cf.* LEWANDOWSKI [7]). On considère le problème couplé

$$(S2)\quad \begin{cases} (1) \quad \partial_t \overline{v} + \nabla p - div\,(\nu_t(\theta)\nabla \overline{v}) = f, \\ (2) \quad div(\overline{v}) = 0, \\ (3) \quad \partial_t \theta - div\,(\nu_t(\theta)\nabla\theta) = -|\nabla \overline{v}|^2\theta^2 + 1, \\ (4) \quad \overline{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad \overline{v}|_{t=0} = \overline{v}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \end{cases}$$

où l'on a supposé toutes les viscosité turbulentes égales pour simplifier. Physiquement, elles ne diffèrent les unes des autres que par une constante (on fait cette simplification par la suite).
Dans ce système, posé dans un domaine tridimensionnel, on ne tient compte que de l'équation pour θ, cette dernière n'introduisant pas de difficulté supplémentaire au problème de mathématiques. Enfin, on prend pour viscosité turbulente

$$\nu_t(\theta) = \frac{1}{r+\theta}, \quad r > 0.$$

THÉORÈME II. 4 — *On suppose que*

- $f \in L^2(Q)$,
- $\overline{v}_0 \in H$,
- $\theta_0 \geq 0$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$,
- $\nu_t(\theta) = \frac{1}{r+\theta}, \quad r > 0$.

Alors, il existe

$$(\overline{v}, \theta) \in L^2([0,\mathcal{T}], V) \times L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega)), \quad p \in L^2(Q),$$

avec $\theta \geq 0$ *p.p tels que*

$$\theta^2 |\nabla \overline{v}|^2 \in L^1(Q)$$

et $(\overline{v}, \theta, p)$ *soit une solution du système* $(S2)$*, les équations de Stokes* $(1,2)$ *ayant lieu au sens de Leray-Lions, l'équation* (3) *au sens des distributions.* ♢

Ce résultat est une variante des résultats des théorèmes II.1,2,3. La difficulté dans ce problème consiste à passer à la limite dans le terme $\theta^2|\nabla\overline{v}|^2$ qui "a le bon signe". Pour cela, on passe par l'intermédiaire d'une forme renormalisée pour l'équation pour θ combinée à une égalité d'énergie.

II. 3 — REMARQUES ADDITIONNELLES SUR LE SYSTÈME (k, ε)

Comme on ne sait rien sur le système (k, ε), on introduit dans LEWANDOWSKI [6] (chapitre 4, section 4.5) le système alternatif tronqué

$$(k,\varepsilon - \text{tronq}) \quad \begin{cases} (a) & \partial_t k + \overline{v}.\nabla k - div(\nu_t(k,\varepsilon)\nabla k) = \nu_t(k,\varepsilon)\,|\nabla\overline{v}|^2 - \varepsilon sg(k), \\ (b) & \partial_t \varepsilon + \overline{v}.\nabla \varepsilon - div(\nu_t(k,\varepsilon)\nabla k) = |T_p(k)|\,|\nabla\overline{v}|^2 - \dfrac{\varepsilon|\varepsilon|}{\gamma_p(|k|)}, \\ (c) & k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (k,\varepsilon)|_{t=0} = (k_0, \varepsilon_0), \end{cases}$$

où

- T_p est la troncature à hauteur p,
- sg est la fonction signe,
- γ_j est la fonction qui est égale $1/(j\,sg)$ sur $[-1/j, 1/j]$ et l'identité ailleurs (troncature au voisinage de 0),
- $\nu_t(k,\varepsilon)$ est une fonction continue minorée par ν.

On montre dans LEWANDOWSKI [6] que lorsque les données initiales sont positives, le champ $\overline{v}$ est donné à divergence nulle, toute solution (k,ε) de $(k,\varepsilon -$ tronq$)$ est telle que $k \geq 0$ et $\varepsilon \geq 0$ p.p. On obtient surtout le résultat du lemme II.1.

LEMME II. 1 — *Soit* (k,ε) *une solution positive du système* $(k,\varepsilon -$ tronq$)$*. On suppose que* $\overline{v} \in L^2([0,\mathcal{T}], V)$ *est fixé,* $(k_0, \varepsilon_0) \in [L^1(\Omega)]^2$ *et que* ν_t *est une fonction bornée par une constante* β*. Alors, les inégalités*

suivantes ont lieu :

$$\begin{cases} \begin{cases} \sup\left(||\,\varepsilon\,||_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))}, \left|\left|\dfrac{\varepsilon^2}{\gamma_p(k)}\right|\right|_{L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \right) \leq \\ p\,||\nabla\overline{v}||^2_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\,\varepsilon_0||_{L^1(\Omega)}, \end{cases} \\ ||\,k\,||_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))} \leq \beta\,||\nabla\overline{v}||^2_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\,k_0||_{L^1(\Omega)}. \end{cases}$$

Ce lemme montre que les second membres des équations du système $(k,\varepsilon$ – tronq) sont dans $L^1(Q)$ dés lors que $|\nabla\overline{v}|$ est dans $L^2(Q)$ et à divergence nulle (pour pouvoir éliminer les termes de transports dans les intégrations par parties). Par conséquent, lorsque l'on remplace dans le système $(S1)$ l'équation pour k par le système $(k,\varepsilon$ – tronq), on obtient les mêmes résultats d'existence que dans les théorèmes II.1, 2, 3.

II. 4 — CAS DE VISCOSITÉS TURBULENTES NON BORNÉES

On expose dans cette section un résultat obtenu dans LEWANDOWSKI-MURAT [1] dans le cas de viscosités non bornées. On étudie le système d'équations scalaires

$$(\rho,k)\quad \begin{cases} (a) & -div(\nu_t(x,k)\,\nabla\rho) = f, \\ (b) & -div(\nu_t(x,k)\,\nabla k) = \nu_t(k)\,|\nabla\rho|^2, \\ (c) & k|_{\partial\Omega} = \rho|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, ρ et k sont des fonctions scalaires.

On commence par définir la notion de solution renormalisée pour ce système, inspirée de la définition de solutions renormalisées pour des équations elliptiques due à LIONS-MURAT [1].

DÉFINITION II. 1 — *On dit qu'un couple* (ρ,k) *de fonctions mesurables sur* Ω *est une solution renormalisée du système* (ρ,k) *si et seulement si*

- $\rho \in H^1_0(\Omega)$,
- $\forall\, j \in \mathbb{R}^\star_+, \quad T_j(k) \in H^1_0(\Omega)$,
- $mes\,\{x \in \Omega;\ |\,k(x)\,| = +\infty\} = 0$,
- $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{1}{q}\left(\displaystyle\int_{\{q\leq|\,k\,|\leq 2\,q\}} \nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2\right) = 0$,

- $\begin{cases} \forall\, h \in C^\infty_c(\mathbb{R}), \\ (a) \quad -div(h(k)\,\nu_t(x,k)\,\nabla\rho) + h'(k)\,\nu_t(x,k)\,\nabla k\,.\nabla\rho = f\,h(k) \quad \textit{dans } D'(\Omega), \\ (b) \quad -div(h(k)\,\nu_t(x,k)\,\nabla k) + h'(k)\,\nu_t(x,k)\,|\nabla k|^2 = \nu_t(x,k)\,|\nabla\rho|^2\,h(k) \quad \textit{dans } D'(\Omega). \end{cases}$

On montre dans LEWANDOWSKI [6], chapitre 5, section 5.2.3 que lorsque $\nu_t > 0$ est une fonction bornée, une solution renormalisée du système (ρ,k) est une solution au sens des distributions et réciproquement, ce qui assure la consistance de cette définition.

THÉORÈME II. 5 — *On suppose que* $f \in L^2(\Omega)$ *et que* ν_t *est une fonction de Carathéodory minorée par* $\nu > 0$. *Alors le système* (ρ,k) *possède une solution renormalisée.*

Il faut noter que dans ce résultat on ne fait aucune hypothèse de croissance sur ν_t. La démonstration se fait à partir d'approximations. On montre qu'une égalité d'énergie à la limite est satisfaite par les troncatures dans

l'équation pour ρ. On trouvera également dans LEWANDOWSKI [6] chapitre 5 une démonstration détaillée de ce résultat.

III — SYSTÈMES INTERVENANT EN OCÉANOGRAPHIE

III. 1 — GÉNÉRALITÉS SUR L'OCÉANOGRAPHIE

Dans cette section, on rappelle les éléments fondamentaux en océanographie nécessaires à situer les problèmes considérés et les résultats décrits dans la suite de ce mémoire. Les détails de la modélisation résumés dans ce qui suit constituent le chapitre 1 de LEWANDOWSKI [6].

L'océan est un fluide tournant gravitationnel. Basiquement, les variables physiques servant à décrire l'océan sont :

- la vitesse du fluide $\vec{U}$,
- la pression p,
- la densité ρ,
- la température T et la salinité S.

La suite de cette section est constituée de deux parties :

1) description du domaine et des échelles,
2) équations satisfaites par les variables

1) Description du domaine et des échelles. Pour simplifier, on travaille dans un domaine Ω défini en coordonnées cartésiennes (x, y, z),

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \Gamma_s \times I\!R ; -H(x, y) \leq z \leq 0\},$$

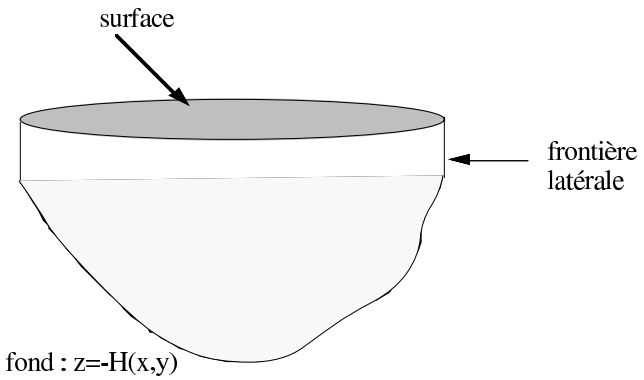

figure 1.1

où Γ_s est un ouvert borné régulier dans $I\!R^2$, H une fonction régulière dont le minimum est strictement positif. On fait l'hypothèse dite du toit rigide :

on suppose la surface de l'océan fixe.

Cette surface fixe est une surface moyenne (*cf.* LEWANDOWSKI [6], chapitre 1). On remplace les informations contenues dans la surface libre réaliste par des conditions aux limites portant sur des quantités moyennes. On note

- Γ_s la surface de l'océan,
- Γ_l les parois latérales,
- Γ_f le fond de l'océan.

Enfin, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace. Le domaine Ω a une frontière Lipchitzienne par morceaux, ce qui fait que les techniques d'intégrations par parties utilisées dans l'obtention des estimations (injections de Sobolev...) et les formulations faibles des problèmes considérés sont valables pour cet ouvert.

On raisonne aux échelles climatiques, c'est-à-dire pour des temps caractéristiques très grand (plusieurs centaines d'années) et des échelles spatiales de l'ordre de celles de la planète. Les échelles verticales sont très petites devant les échelles horizontales puisque l'océan constitue une "mince couche d'eau" autour de la planète. C'est pourquoi pour distinguer les deux échelles, on pose

$$\nabla_c f = \nabla f + \partial_z f \vec{k}, \quad \Delta_c f = \Delta f + \partial^2_{zz} f ....,$$

où ∇f est le gradient par rapport à (x, y), Δ le Laplacien par rapport à (x, y). On fait de même pour tous les autres opérateurs différentiels.

2) Équations satisfaites par les variables On commence par traiter successivement la pression, la loi de conservation de la masse, la loi d'état puis les conditions aux limites. Ensuite, on écrit le système des équations primitives.

• *La pression.* La conséquence importante de l'anisotropie de l'océan à grande échelle est que l'on considère l'océan comme un fluide hydrostatique, c'est-à-dire que l'équation hydrostatique est satisfaite :

$$\partial_z p = -\rho g,$$

où g est la constante de gravitation. En intégrant cette équation suivant la verticale on obtient

$$p = p_s + \int_z^0 \rho g \, dz', \tag{III.1}$$

où $p_s = p_s(t, x, y)$ est la pression superficielle à la surface Γ_s.

• *Équation de conservation.* L'expérience montre que la densité ρ varie d'environ 2% autour d'une valeur de référence. Sur cette base, l'équation de conservation de la masse

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -div_c \vec{U}$$

$(D/Dt = \partial_t + \vec{U}.\nabla_c)$ se simplifie en

$$div_c \vec{U} = 0, \tag{III.2}$$

approximation connue sous le nom d'approximation de Boussinesq. Dans la suiteon pose

$$\vec{U} = \vec{v} + w\vec{k} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{k}\,.$$

Il faut noter que l'hypothèse du toit rigide implique que $w = 0$ sur le toit Γ_s. Par conséquent, lorsque l'on intègre $(III.2)$ par rapport à la verticale, on obtient

$$w = W(\vec{v}) = \int_z^0 div\vec{v} = M(div\vec{v}).$$

• *Équation d'état.* L'expérience montre que la densité est liée à la salinité, la température et la pression par une équation d'état

$$\rho = \rho(S,T,p).$$

Sur la base de l'équation de Boussinesq, on néglige dans un premier temps la dépendance en pression. Cette approximation est remise en question dans la section III. 5. On linéarise l'équation d'état :

$$\rho = \rho_0 + \rho_S(S - S_0) - \rho_T(T - T_0), \tag{$III.3$}$$

où ρ_0, ρ_S, ρ_T, S_0 et T_0 sont des constantes positives.

Grâce aux équations $(III.1,2,3)$, on peut éliminer du système des équations pour un fluide tournant gravitationnel la composante verticale de la vitesse w, la densité ρ et la pression p, remplacée par la pression superficielle p_s.

• *Conditions aux limites.* On suppose que la composante horizontale de la vitesse $\vec{v}$ est nulle au fond et sur les parois latérales. Sur la surface Γ_s, elle vérifie la condition de flux

$$\nu_v \partial_z \vec{v} = C_f \ \vec{\mathrm{v}},$$

où ν_v est la viscosité verticale de l'eau, C_f une constante sans dimension et $\vec{\mathrm{v}}$ est la tension du vent, une fonction définie sur Γ_s supposée connue. On démontre alors sans difficulté en combinant l'équation de boussinesq $(III.2)$ avec ces conditions aux limites sur Γ_f que $\vec{v}$ satisfait la contrainte

$$div\left(\int_{-H(x,y)}^{0} \vec{v}\ dz'\right) = 0.$$

Les conditions aux limites pour la température T et la salinité S sont des conditions de flux obtenues à l'aide d'un bilan thermodynamique, conditions linéarisées dans la suite sans vraiment changer la nature du problème mathématique. Enfin, S et T jouant exactement le même rôle, on ne tient pas compte de S dans ce qui suit, ce qui n'affecte pas la nature qualitative du problème.

• *Système d'équations primitives.* Le système obtenu pour des variables sans dimension est le suivant :

$$(EP)\quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{v} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \\ \dfrac{1}{Ro}\left(f\ \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s - M(\nabla T)\right) = 0, \end{cases} \\ (b) & \partial_t T + (\vec{v}\,\nabla)\,T + W(\vec{v})\,\partial_z T - \mathcal{K}_{T,h}\Delta T - \mathcal{K}_{T,v}\partial^2_{zz} T = 0, \\ (c) & div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0, \\ (d) & \nu_v\, \partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (e) & \left(\mathcal{K}_{T,h} \dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v} \dfrac{\partial T}{\partial n_z}\right)\Big|_{\Gamma_s \cup \Gamma_f \cup \Gamma_l} = \alpha\,(T^\star - T), \\ (f) & \vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v}_0, \quad T|_{t=0} = T_0. \end{cases}$$

Les inconnues de ce système sont $(\vec{v}, T, p_s)$, $\vec{v}$ étant un champ horizontal

$$\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\ \vec{e}_2$$

et on a posé

$$\begin{cases} \forall\, f \in C(\Omega, I\!R), \quad M(f) = M(f)(x,y,z) \stackrel{def}{=} \displaystyle\int_z^0 f(x,y,z')\,dz', \\ \tilde{M}(f)(x,y) \stackrel{def}{=} M(f)(x,y,-H(x,y)) = \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 f(x,y,z')\,dz', \\ W(\vec{v}) \stackrel{def}{=} M(div\vec{v}). \end{cases}$$

Les coefficients Ro (nombre de Rossby, qui est égal au rapport entre le temps de révolution de la terre et l'échelle de temps caractéristique), f (le coefficient de Coriolis), $\alpha > 0$, $\nu_h > 0$, $\nu_v > 0$, $\mathcal{K}_{T,h} > 0$, $\mathcal{K}_{T,v} > 0$ sont constants et fixés. Les autres constantes sont normalisées. On appelle ce système le système des équations primitives pour l'océan. ♢

Dans LIONS-TEMAM-WANG [1], les auteurs introduisent ce système d'équations primitives et montrent un résultat d'existence d'une solution faible. La remarque principale est que l'équation $div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0$ s'interprète comme une contrainte pour laquelle les multiplicateurs de Lagrange sont exactement les gradients de distributions définies sur Γ_s (*i.e.* qui ne dépendent pas de z). Par conséquent, la pression superficielle p_s disparait de la formulation faible du système $(M1)$ lorsque les tests choisis vérifient cette contrainte. Un théorème de type De-Rham permet de retrouver p_s à partir de la formulation faible.

Les résultats de LIONS-TEMAM-WANG [1] et le cours du collège de France du Professeur J.-.L. LIONS ont constitué le point de départ du travail de l'auteur en océanographie, qui s'est posé initialement la question du couplage de ce système avec les équations de la turbulence. Dans le chapitre 2 de LEWANDOWSKI [6], on redémontre entièrement le résultat d'existence de LIONS-TEMAM-WANG [1] avec une méthode de compacité que l'on a voulu rendre compatible avec l'étude ultérieure des modèles de turbulence.

Dans la section suivante, on introduit l'équation pour l'énergie cinétique turbulente verticale en océanographie.

III. 2 — SUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE AVEC LA TENSION DU VENT

De même que l'on introduit le problème de Reynolds pour les équations de Navier-Stokes (*cf.* section II. 1), on cherche à moyenner les équations primitives. Des écarts importants entre les différentes échelles horizontales pouvant intervenir (du mètre à une centaine de kilomètres), il est pour le moment difficile de décrire la turbulence horizontale dans l'océan, ce qui est un problème ouvert. En revanche, le caractère hydrostatique et la structure stratifiée de l'océan permettent une meilleure compréhension des échanges turbulents verticaux. On définit l'énergie cinétique turbulente k pour l'océan comme en II. 1. Après modélisation (*cf.* LEWANDOWSKI [6], chapitre 3), on obtient comme équation pour k (les constantes positives ont été rendue égales à 1, les constantes négatives égales à -1)

$$(k-\text{eq}) \quad \begin{cases} (a) \quad \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z\vec{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\sqrt{|k|}, \\ (b) \quad k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0, \end{cases}$$

Dans cette équation, ν_t, ν_v^t et μ_t sont les viscosité turbulentes, de l'ordre de $\nu+\sqrt{k}$ dans les modèles physiques ($\nu > 0$) et $\lambda > 0$ est une constante. On est obligé dans la suite de supposer ces viscosités bornées, les cas généraux constituant des problèmes ouverts.

Cette équation diffère de l'équation pour k du système $(S1)$ par le terme de production $|\partial_z\vec{v}\,|^2$ au lieu de $|\nabla_c\vec{U}\,|^2$ et par le terme supplémentaire $\mu_t(k)\,\partial_z\rho$. Le terme de transport est négligé devant la diffusion. Le terme $|\partial_z\vec{v}\,|^2$ exprime que l'on n'étudie que la turbulence verticale. Il est issu de la structure stratifiée de l'océan. Par ailleurs, $\mu_t(k)\,\partial_z\rho$ est un terme de rappel qui vient du caractère hydrostatique de l'océan. Enfin,

$-k\sqrt{|k|}$ est le terme de cascade inverse qui décrit la quantité d'énergie que l'échelle dissipative peut restituer à la grande échelle.

La difficulté supplémentaire dans cette équation par rapport à l'équation pour k $(S1,c)$ de la partie précédente réside dans la condition au limite non homogène en surface. On ne peut pas appliquer directement la technique d'interpolation de BOCCARDO-GALLOUËT [1]. Pour simplifier, on suppose que $\vec{\mathrm{v}}$ est stationnaire, c'est-à-dire ne dépend pas du temps.

THÉORÈME III. 1 — *On suppose que*

(i) le couple $(\vec{v},\rho)$ *est fixé dans* $L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^3)$,
(ii) $\vec{\mathrm{v}}=0$ *et* ν_t *satisfait l'hypothèse de croissance*

$$\exists C\in(\mathbb{R}^+)^2,\ \exists\theta\in[0,2/3[\,;\ \forall k\in\mathbb{R},\quad 0<\nu\leq\nu_t(k)\leq C(1+|\,k\,|^\theta),$$

ou bien $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$ *et* ν_t *est bornée, dérivable de dérivée bornée,* ν_t *est minorée par* $\nu>0$,
(iii) ν_v^t *et* μ_t *sont continues et bornées, minorées par* 0 *et vérifient* $\nu_v^t(0)=\mu_t(0)=0$,
(iv) $k_0\in L^1(\Omega)$, $k_0\geq 0$ *p.p.*

Le problème $(k-\mathrm{eq})$ *a une solution au sens des distributions* $k\geq 0$ *p.p avec* $k\in\bigcap_{p<3/2}L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$.
$\diamondsuit$

Ce résultat est prouvé dans LEWANDOWSKI [6]. Le principe de la démonstration consiste à faire un relèvement de la condition aux limites pour se ramener à un problème avec des conditions de Dirichlet homogènes. Ce relèvement introduit des termes supplémentaires dans l'équation.
On construit des approximations par une méthode de temps de retard puis on passe à la limite dans les équations après avoir utilisé la technique d'interpolation de BACCARDO-GALLOUËT [1] pour obtenir des estimations dans $\bigcap_{p<3/2}L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$. La difficulté est due aux termes issus du relèvement et l'hypothèse sur les régularités de $\vec{\mathrm{v}}$ et de ν_t joue un rôle crucial pour l'obtention des estimations.

III. 3 — ÉTUDE DU SYSTÈME DE TURBULENCE OCÉANIQUE TKE

Les résultats de cette section font l'objet d'une partie du chapitre 6 dans LEWANDOWSKI [6]. On étudie la version "mathématisée" du système TKE utilisé au LODYC pour simuler la circulation océanique à grande échelle et qui a la structure suivante :

$$(TKE)\quad\begin{cases}
(a) & \begin{cases}\partial_t\vec{v}+(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}+W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v}-\nu_h\Delta\vec{v}\ -\\ \partial_z((\nu_v^t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v})+\vec{k}\times\vec{v}+\nabla p_s+M(\nabla\rho)=0,\end{cases}\\
(b) & div(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0}\vec{v}\,dz)=0,\\
(c) & \partial_t\rho+(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{\rho}+W(\vec{v})\,\partial_z\vec{\rho}-\mathcal{K}_h\Delta\rho-\partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho)=F(\rho),\\
(d) & \partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k)=\nu_v^t(k)\,|\partial_z\vec{v}\,|^2-k\sqrt{|\,k\,|}+\mu_t(k)\,\partial_z\rho,\\
(e) & (\nu_t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s}=\vec{\mathrm{v}},\quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\
(f) & (\mu_t(k)+\nu)\partial_z\rho|_{\Gamma_s}=-\alpha\,\rho,\quad(\alpha>0),\quad \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l}=0,\\
(g) & k|_{\Gamma_s}=m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|,\quad k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\
(h) & (\vec{v},\rho,k)|_{t=0}=(\vec{v}_0,\rho^0,k_0).
\end{cases}$$

Dans ce système, les inconnues sont $\vec{v}$, ρ, p_s et k. On a remplacé la température-salinité par l'écart à la densité de référence encore noté ρ. Cette variable apparaît naturellement dans les équations de la turbulence

et est donc plus commode à utiliser. On a mis dans l'équation pour ρ un terme source $F(\rho)$ qui tient compte des échanges thermodynamiques en surface. Les constantes ont été normalisées. On rappelle que $M(\rho)=\int_z^0 \rho\, dz'$, $\tilde{M}(\vec{v})=\int_{-H(x,y)}^0 \vec{v}\, dz$, $W(\vec{v})=M(div\vec{v})$. L'espace naturel pour ρ est l'espace $H^1_{f,l}(\Omega)$ et l'espace naturel pour $\vec{v}$ est l'espace $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ qui sont définis par

$$\begin{cases} H^1_{f,l}(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega),\, u|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l}=0\right\},\\ \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}=\left\{\vec{v}=u\,\vec{e}_1+v\,\vec{e}_2,\,(u,v)\in (H^1_{f,l}(\Omega))^2,\, div(\tilde{M}(\vec{v}))=0\right\}. \end{cases}$$

L'espace $\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ est l'adhérence dans $[L^2(\Omega)]^2$ des champs $\vec{v}=u\,\vec{e}_1+v\,\vec{e}_2$ dont les coordonnées sont de classe C^∞ et nulles sur $\Gamma_l\cup\Gamma_f$ et qui vérifient la contrainte $div(\tilde{M}(\vec{v}))=0$.

Savoir si le système TKE possède une solution faible est un problème ouvert. La difficulté est analogue à celle rencontrée dans le système $(S1)$. À cause du terme de transport, on ne sait pas si les limites des suites de solutions approchées satisfont l'égalité d'énergie, ce qui fait que l'on ne peut pas passer à la limite dans le terme de production $\nu^t_v(k)|\partial_z\vec{v}\,|^2$ dans l'équation pour k. En fait, dans ce cas, le problème est plus difficile que pour le système $(S1)$ en raison du terme $W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v}$ dans (TKE) (et aussi dans (EP)) qui est au mieux estimé dans un espace de type L^1 en (x,y,z) alors que le terme $(\overline{v}\nabla)\overline{v}$ dans $(S1)$ est dans un espace de type H^{-1} en (x,y,z). Même dans le cas stationnaire le problème est ouvert. Pour cette raison, on est conduit à filtrer le système TKE par un système dans lequel on remplace les termes de transport par des termes de transport tronqué, définis comme suit pour tout $(\vec{v},\rho)\in\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1_{f,l}(\Omega)$, $j\in[1,+\infty[$ et notés $B_j(\vec{v})$ et $C_j(\vec{v},\rho)$:

$$\begin{cases} \forall(\vec{x},\tau)\in\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1(\Omega),\\ <B_j(\vec{v}),\vec{x}>=-\displaystyle\int_\Omega(\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c)(\vec{x}).T_j(\vec{v}),\quad <C_j(\vec{v},\rho),\tau>=-\int_\Omega T_j(\rho)\,\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c\tau, \end{cases}$$

où l'on note

$$\vec{U}(\vec{v})=\vec{v}+W(\vec{v})\,\vec{k}\,.$$

On montre dans LEWANDOWSKI [6], chapitre 2 section 2.3.4 (lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4) que les termes de transport tronqué définissent des opérateurs continus, stables par passage à la limite, qui convergent faiblement vers les termes de transport d'origine lorsque j tend vers l'infini et qui satisfont

$$\forall(\vec{v},\rho)\in\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1(\Omega),\quad <B_j(\vec{v}),\vec{v}>=0,\quad <C_j(\vec{v},\rho),\rho>=0.$$

On considère alors le système (TKE) avec des termes de transport tronqués,

$$(TKE-\text{tronq})\quad \begin{cases} (a) & \begin{cases}\partial_t\vec{v}+B_j(\vec{v})-\nu_h\Delta\vec{v}-\partial_z((\nu^t_v(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v})+\\ \vec{k}\times\vec{v}+\nabla p_s+M(\nabla\rho)=0,\end{cases}\\ (b) & div\left(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^0\vec{v}\,dz\right)=0,\\ (c) & \partial_t\rho+C_j(\vec{v},\rho)-\mathcal{K}_h\Delta\rho-\partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho)=F(\rho),\\ (d) & \partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k)=\nu^t_v(k)\,|\partial_z\vec{v}\,|^2-k\sqrt{|\,k\,|}+\mu_t(k)\,\partial_z\rho,\\ (e) & (\nu_t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s}=\vec{\mathrm{v}},\quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\ (f) & (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s}=-\alpha\,\rho,\quad(\alpha>0),\quad \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l}=0,\\ (g) & k|_{\Gamma_s}=m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|,\quad k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\ (h) & (\vec{v},\rho,k)|_{t=0}=(\vec{v}_0,\rho^0,k_0). \end{cases}$$

Il est bon de préciser ici le sens faible donné au système $(TKE-\text{tronq})$. On dit que

$$(\vec{v},\rho,k)\in L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1_{f,l}(\Omega))\times\bigcap_{p<3/2}L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$$

est une solution faible du système $(TKE-\text{tronq})$ si les points i), ii) et iii) suivants sont vérifiés.
i) *Équation de transport* : $\partial_t\vec{v}\in L^2([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})')$ et

$$\left\{\begin{array}{l}\quad\forall\ \vec{x}\in L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}),\quad\forall t\in[0,\mathcal{T}],\\ \displaystyle\int_0^t<\partial_t\vec{v},\vec{x}>+\int_0^t<B_j(\vec{v}),\vec{x}>+\nu_h\int_0^t\int_\Omega\nabla\vec{v}\,.\,\nabla\vec{x}+\\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega(\nu_v^t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{x}-\int_0^t\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{x}+\\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{x}+\int_0^t\int_\Omega M(\nabla\rho)\,.\,\vec{x}=0.\end{array}\right.$$

ii) *Équation de traceur* : $\partial_t\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$ et

$$\left\{\begin{array}{l}\quad\forall\,\hat{\rho}\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)),\quad\forall t\in[0,\mathcal{T}],\\ \displaystyle\int_0^t<\partial_t\rho,\hat{\rho}>+\int_0^t<C_j(\vec{v},\rho),\hat{\rho}>+\mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega\nabla\rho.\nabla\hat{\rho}+\\ \displaystyle\alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j.\hat{\rho}+\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho\,.\,\partial_z\hat{\rho}=\int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,.\,\hat{\rho}.\end{array}\right.$$

iii) *Équation pour l'ECT* :

$$\left\{\begin{array}{l}\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega),\\ \displaystyle-\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\,\partial_t\varphi+\lambda\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\nabla k.\nabla\varphi+\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\nu_t(k)\,\partial_z k.\partial_z\varphi=\\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\nu_v^t(k)\,|\,\partial_z\vec{v}\,|^2\varphi+\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\mu_t(k)\,\partial_z\rho\,\varphi-\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\sqrt{k}\,\varphi.\end{array}\right.$$

♢

Enfin, si $(\vec{v},\rho,k)$ est une solution faible du système $(TKE-\text{tronq})$, on montre qu'il existe $p_s\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}],L^2(\Omega))$ telle que $(\vec{v},\rho,k,p_s)$ soit une solution au sens des distributions du système $(TKE-\text{tronq})$ (*cf.* LEWANDOWSKI [6], chapitre 2, section 2.2.1). Dans le cas où le terme de transport est le terme d'origine, on est obligé de prendre des tests beaucoup plus réguliers dans l'équation pour $\vec{v}$ pour lui donner un sens faible. On note au passage que pour cette raison, la formulation faible du système (EP) est une formulation "très faible" et la pression p_s obtenue n'est "pas mieux" qu'une distribution.

On fait les hypothèses :

(H.III.1) $(\vec{v}_0,\rho^0,k_0)\in\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}\times L^2(\Omega)\times L^1(\Omega)$, $k_0\geq 0$ p.p dans l'ouvert Ω,

(H.III.2) F est une fonction continue de ρ et il existe une constante C telle que

$$\forall\rho\in I\!R,\quad|F(\rho)|\leq C(1+|\rho|),$$

(H.III.3) ν_v^t, μ_t et ν_t sont des fonctions continues, ν_v^t et μ_t sont positives et bornées, ν_t est minorée par $\nu>0$ et $\nu_v^t(0)=\mu_t(0)=0$,

(H.III.4) $\vec{\mathrm{v}}=0$ et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance

$$\exists C\in(I\!R^+)^2,\ \exists\theta\in[0,2/3[;\ \forall k\in I\!R,\quad 0<\nu\le\nu_t(k)\le C(1+|\,k\,|^\theta),$$

ou bien $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée minorée par ν.

THÉORÈME III. 2 — *On suppose réalisées les hypothèses* (H.III.1) *(régularité des données initiales),* (H.III.2) *(F continue et sous linéaire),* (H.III.3) *(continuité des viscosités, positivité et bornitude de ν_v^t et μ_t, $\nu_v^t(0)=0$, $\mu_t(0)=0$, $\nu_t\ge\nu$),* (H.III.4) *(hypothèse de croisance ou de bornitude sur ν_t suivant que $\vec{\mathrm{v}}=0$ ou non et régularité de $\vec{\mathrm{v}}$). Alors le système* $(TKE-\text{tronq})$ *possède une solution faible*

$$(\vec{v},\rho,k)\in L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1_{f,l}(\Omega))\times\bigcap_{p<3/2}L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega)),$$

avec $k\ge0$ p.p. ♢

La question se pose de faire tendre j vers l'infini dans le système $(TKE-\text{tronq})$. Comme pour le système $(S1)$, une mesure positive apparaît dans le second membre de l'équation pour k.

THÉORÈME III. 3 — *On suppose réalisées les hypothèses* (H.III.1) *(régularité des données initiales),* (H.III.2) *(F continue et sous linéaire),* (H.III.3) *(continuité des viscosités, positivité et bornitude de ν_v^t et μ_t, $\nu_v^t(0)=\mu_t(0)=0$, $\nu_t\ge\nu$),* (H.III.4) *(hypothèse de croisance ou de bornitude sur ν_t suivant que $\vec{\mathrm{v}}=0$ ou non et régularité de $\vec{\mathrm{v}}$). Alors il existe*

- *une mesure positive m,*
- $(\vec{v},\rho,p_s,k)$ *vérifiant*

$$\begin{cases}\vec{v}\in L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}),\\ \rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)),\\ p_s\in\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}],W^{-1,2}(\Gamma_s)),\\ k\in\displaystyle\bigcap_{1\le p<3/2}L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega)),\quad k\ge0,\end{cases}$$

tels que $(\vec{v},\rho,p_s,k)$ soit une solution au sens des distributions du système

$$(TKE\infty)\quad\begin{cases}(a)\quad\begin{cases}\partial_t\vec{v}+(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}+W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v}-\nu_h\Delta\vec{v}\ -\\ \partial_z((\nu_v^t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v})+\vec{k}\times\vec{v}+\nabla p_s+M(\nabla\rho)=0,\end{cases}\\ (b)\quad div(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^0\vec{v}\,dz)=0,\\ (c)\quad\partial_t\rho+(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{\rho}+W(\vec{v})\,\partial_z\vec{\rho}-\mathcal{K}_h\Delta\rho-\partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho)=F(\rho),\\ (d)\quad\partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k)=\nu_v^t(k)\,|\partial_z\vec{v}\,|^2+m-k\sqrt{|\,k\,|}+\mu_t(k)\,\partial_z\rho,\\ (e)\quad(\nu_t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s}=\vec{\mathrm{v}},\quad\vec{v}\,|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\ (f)\quad(\mu_t(k)+\nu)\partial_z\rho|_{\Gamma_s}=-\alpha\,\rho,\quad(\alpha>0),\quad\rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l}=0,\\ (g)\quad k|_{\Gamma_s}=m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|,\quad k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\ (h)\quad(\vec{v},\rho,k)|_{t=0}=(\vec{v}_0,\rho^0,k_0),\end{cases}$$

système entièrement posé dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$. ♢

Le système limite $(TKE\infty)$ est le système (TKE) lorsque $m \neq 0$. On conjecture que suivant les données initiales, m peut ne pas être nulle (voir les arguments justifiant cette conjecture dans LEWANDOWSKI [6], chapitre 6).

Outre les difficultés mathématiques posées par le système (TKE), celui-ci pose également des difficultés sur le plan numérique (*cf.* DELECLUSE [1]). Ce sont les raisons qui font que l'on a cherché un modèle alternatif de turbulence filtré, basé sur des approximations classiques en géophysique. C'est le système géostrophico-barotrope (GBT) qui fait l'objet de la section suivante.

III. 4 — LE SYSTÈME GÉOSTROPHICO-BAROTROPE TURBULENT : MODÉLISATION ET RÉSULTAT D'EXISTENCE

La modélisation du système géostrophico-barotrope turbulent (GBT) fait l'objet de la section 3.3 du chapitre 3 dans LEWANDOWSKI [6], son analyse mathématique des sections 6.2 et 6.3 du chapitre 6. On se limite dans ce qui suit à décrire les éléments principaux de modélisation et énoncer le résultat d'existence principal, dont la démonstration "à tiroirs" est assez longue.

1. Sur la modélisation — La modélisation du système (GTB) est basée sur la notion d'équilibre géostrophique qui permet de filtrer certaines oscillations et sur la moyennisation verticale de l'équation satisfaite par la vitesse pour pouvoir calculer p_s.

a) Équilibre géostrophique. On rappelle que l'équation de moment du système des équations primitives adimensionnalisées (EP) peut s'écrire sous la forme (avec ici des constantes non normalisées)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \frac{1}{Ro}\left(f\, \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p \right) = 0.$$

Plus le nombre de Rossby Ro est petit, plus l'échelle d'observation en temps est grande par rapport au temps de révolution terrestre. On est donc tenté aux échelles climatiques de faire tendre Ro vers zéro dans cette équation. Si on le fait brutalement, on trouve à la limite l'équation

$$f\, \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p = 0,$$

appellée *l'équilibre géostrophique* et souvent utilisé en climatologie aux échelles climatiques (*cf.* PEDLOSKI [1]). En utilisant l'équilibre géostrophique, on dit d'un point de vue physique que la force de Coriolis est entièrement compensée par les forces de pression.

Cependant, ce passage à la limite est plus délicat qu'il n'y paraît. Dans GRENIER [1], l'auteur met en évidence l'apparition d'oscillations dans les équations lorsque Ro tend vers zéro. Le lecteur peut voir aussi l'appendice C dans LEWANDOWSKI [6], où en suivant LIONS [2], on met ce phénomène d'oscillation en évidence sur un modèle bidimensionnel simplifié. On est alors tenté pour Ro "'petit" de scinder le champ des vitesses en une partie géostrophique et une partie oscillante et écrire

$$\vec{v} = \vec{U}_g + \vec{U}_{osc},$$

ce qui est également fait dans CHEMIN [1] où l'auteur étudie le système quasi-géostrophique (*cf.* aussi PEDLOSKI [1]), LIONS [2]).

DÉFINITION III. 1 — *On appelle le champ géostrophique, noté $\vec{U}_g$, la composante du champ horizontal de la vitesse dont la force de Coriolis associée équilibre les forces de pressions, c'est-à-dire la solution de l'équation*

$$f\, \vec{k} \times \vec{U}_g + \nabla p = 0. \qquad (III.4)$$

♢

On pose dans la suite

$$\vec{U}_g = U_g\,\vec{e}_1 + V_g\,\vec{e}_2\,.$$

On calcule maintenant les coordonnées de $\vec{U}_g$. De l'équation $(III.4)$ on déduit que

$$U_g = -\frac{1}{f}\,\partial_y p, \quad V_g = \frac{1}{f}\,\partial_x p. \tag{III.5}$$

Cette notion n'a de sens qu'aux lieux où $f \neq 0$, en d'autres termes quand on n'est pas à l'équateur. Tant que l'on étudie un modèle où intervient la géostrophie, on suppose que $f \neq 0$, de sorte que pour simplifier le formalisme on pose à partir de maintenant $f = 1$.

Les formules $(III.5)$ combinées à l'équation hydrostatique $\partial_z p = -\rho$ conduisent à

$$\begin{cases} U_g = -M(\partial_y \rho) - \partial_y p_s \stackrel{def}{=} U_g(p_s, \rho), \\ V_g = M(\partial_x \rho) + \partial_x p_s \stackrel{def}{=} V_g(p_s, \rho). \end{cases} \tag{III.6}$$

On note en premier lieu que pour tout p_s et tout ρ, le champ $\vec{U}_g$ est un champ horizontal et incompressible, c'est-à-dire qui vérifie

$$div\,\vec{U}_g\,(p_s, \rho) = 0. \tag{III.7}$$

On remplace $\vec{v}$ par $\vec{U}_g$ dans les équations satisfaites par la variable thermodynamique ρ et l'énergie cinétique turbulente (ECT). Ce faisant, on filtre les oscillations possibles dans le système. En particulier, le terme de cisaillement vertical $|\partial_z \vec{v}\,|^2$ dans l'équation pour l'ECT $(k - \text{eq})$ est remplacé par le terme de cisaillement géostrophique $|\partial_z \vec{U}_g|^2$, calculé en fonction de ρ dans ce qui suit. On a

$$\partial_z \vec{U}_g = -(\partial_y \rho + \partial^2_{zy} p_s)\,\vec{e}_1 + (\partial_x \rho + \partial^2_{zx} p_s)\,\vec{e}_2\,.$$

Puisque p_s ne dépend pas de z,

$$\partial_z \vec{U}_g = -\partial_y \rho\,\vec{e}_1 + \partial_x \rho\,\vec{e}_2\,.$$

On en déduit que

$$|\partial_z \vec{U}_g\,|^2 = |\nabla \rho|^2. \tag{III.8}$$

Par conséquent, l'équation filtrée pour l'ECT s'écrit

$$\partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k)\,|\nabla \rho|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z \rho - k\sqrt{k}. \tag{III.9}$$

Cette remarque est la base de la construction du modèle géostrophico-barotrope turbulent. Le terme quadratique filtré dépend maintenant d'une quantité scalaire et non plus d'une quantité vectorielle.

b) Moyenne verticale de l'équation pour la vitesse. On a ensuite besoin d'une équation de fermeture pour la pression superficielle p_s. Celle-ci est obtenue en moyennant l'équation de moment pour $\vec{v}$ suivant la verticale. On introduit le filtre de moyenne

$$\underline{h} \stackrel{def}{=} \frac{1}{H(x,y)} \int_{-H(x,y)}^{0} h\,dz \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(h).$$

La moyenne $\underline{\vec{v}}$ de $\vec{v}$ s'appelle la vitesse barotrope. Après modélisation, on obtient l'équation posée dans un domaine bidimensionnel,

$$(III.10)\qquad \begin{cases} \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\,\underline{\vec{v}} + K_b Rot(rot)(\underline{\vec{v}}) \,+\, k \times \underline{\vec{v}} \,+ \nabla\,(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \\ \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\ div\,\underline{\vec{v}} = 0, \\ rot\,\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\,|_{\partial\Gamma_s} = 0, \quad \underline{\vec{v}}|_{t=0} = \underline{\vec{v}}_0, \end{cases}$$

en rappelant que $M(\rho) = \int_z^0 \rho\, dz'$ et $\mathcal{K}_b \geq \nu$ est une constante.

Le système géostrophico-barotrope turbulent est :

$$(GBT)\qquad \begin{cases} (a) \quad \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + \,K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \\ \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\ (b) \quad div\,\underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\ (c) \quad \partial_t \rho + \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z\rho) = F(\rho) \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \\ (d) \quad \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2 + \,\mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\,\sqrt{|\,k\,|} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \\ (e) \quad rot\,\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\,|_{\partial\Gamma_s} = 0, \\ (f) \quad (\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\Gamma_s}, \quad \rho|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (g) \quad k|_{\Gamma_s} = m_b|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (h) \quad (\underline{\vec{v}}, \rho, k)|_{t=0} = (\underline{\vec{v}}_0, \rho^0, k_0). \end{cases}$$

2. Analyse mathématique — On démontre dans LEWANDOWSKI [6], chapitre 6, un résultat d'existence de solutions faibles pour le système (GTB) lorque la donnée initiale ρ^0 est bornée. Dans ce résultat, on suppose que $||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$ est assez petite ou les constantes de diffusion sont assez grandes. Le résultat dépend de

i) la constante κ définie par

$$\kappa^2 \stackrel{def}{=} \frac{||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\, C_H}{2\,inf(\nu, (\mathcal{K}_h - \,||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}(2\,C_H + 1/2)))},$$

où

$$C_H = \sup_{(x,y)\in\Gamma_s} H(x,y),$$

et qui a un sens quand $\mathcal{K}_h > ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\,\left(2\,C_H + \frac{1}{2}\right)$, ce que l'on suppose dans la suite,

ii) la norme q de l'opérateur linéaire

$$\mathcal{N}: \quad \begin{cases} L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)), \\ \rho \longrightarrow \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 \left(\int_z^0 \rho\, dz' \right) dz, \end{cases}$$

qui est définie à condition que $H \in C^1(\overline{\Gamma_s})$ et de minimum strictement positif (*cf.* lemme 6.3.2, section 6.3 dans LEWANDOWSKI [6], chapitre 6).

On note que lorsque ρ^0 est fixé,

$$\lim_{\nu\to\infty} \kappa = 0,$$

et que lorsque les constantes de diffusion sont fixées,

$$\lim_{||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\to 0} \kappa = 0.$$

L'argument principal pour la preuve de l'existence d'une solution faible au système (GTB) est la mise en évidence de p_s comme le point fixe d'une application. C'est pourquoi, une des hypothèses de base pour l'obtention de ce résultat est

$$\kappa q < 1,$$

une hypothèse satisfaite pour des grandes viscosités ou des petites données initiales. On retrouve ici une condition assez usuelle en mécanique des fluides :

"données initiales petites ou grandes viscosités"

(*cf.* TEMAM [1]). Dans la mesure où ρ est l'écart de la densité par rapport à une valeur moyenne et que cet écart est faible d'après l'expérience, cette hypothèse est physiquement acceptable.
Dans ce qui suit on note

$$Z \stackrel{def}{=} \left\{ \vec{u} \in [L^2(\Gamma_s)]^2 \,;\, rot\,\vec{u} \in L^2(\Gamma_s) \,;\, div\vec{u} = 0 \,;\, \vec{u}\,.\,\vec{n} \mid_{\partial\Gamma_s} = rot\,\vec{u} \mid_{\partial\Gamma_s} = 0 \right\}.$$

Les hypothèses précises sont :

(H.III.2) F est continue et sous linéaire,

(H.III.3) ν_v^t, μ_t et ν_t sont des fonctions continues, ν_v^t et μ_t sont positives et bornées, $\nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0$ et ν_t est minorée par $\nu > 0$,

(H.III.4) $\vec{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance

$$\exists C \in (I\!R^+)^2,\ \exists \theta \in [0, 2/3[\,; \quad \forall k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \leq C(1 + |\,k\,|^\theta),$$

ou bien $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée,

(H.III.5) F est décroissante et $sg(x)\,F(x) \leq 0$,

(H.III.6) $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$,

(H.III.7) $H \in C^1(\overline{\Gamma}_s)$, $m_H = Inf H > 0$,

(H.III.8) l'inégalité $\mathcal{K}_h > ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)} \left(2C_H + \frac{1}{2}\right)$ a lieu,

(H.III.9) $(\nu, \rho^0) \in A = \{(\nu, \rho^0) \in I\!R^+ \times L^\infty(\Omega)\,;\ 0 < q\,\kappa < 1\}$,

(H.III.10) $\underline{\vec{v}}_0 \in Z \cap H^2(\Gamma_s)$, $k_0 \geq 0$, $k_0 \in L^1(\Omega)$.

L'hypothèse (H.III.8) fait que $\kappa^2 > 0$, ce qui donne un sens à cette constante.

THÉORÈME III. 4 — *On suppose satisfaites les hypothèses* (H.III.2), (H.III.3), (H.III.4), (H.III.5), (H.III.6), (H.III.7), (H.III.8), (H.III.9) *et* (H.III.10). *Alors le système* (GTB) *possède une solution* $(\underline{\vec{v}}, \rho, p_s, k)$ *telle que*

$$\begin{cases} (\underline{\vec{v}}, \rho, p_s) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], Z) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)), \\ k \in \left(\bigcap_{1 \leq p < 3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega)) \right), \end{cases}$$

et $k \geq 0$ *p.p.*
L'équation (GTB, a) *a lieu dans* $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s)$ *et les équations* (GTB, c) *et* (GTB, d) *ont lieu dans* $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$. *Enfin,* $\rho \in L^\infty([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ *et l'inégalité*

$$||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}$$

a lieu. ♢

Les étapes de la démonstration de ce résultat sont les suivantes :

i) étude de l'équation pour ρ à p_s et k fixés, existence et unicité d'une solution bornée,
ii) étude du système géostrophico-barotrope non turbulent pour k fixé, existence et unicité par un théorème de point fixe,
iii) construction d'approximations au système (GTB) par une méthode de temps de retard puis passage à la limite dans les équations.

Dans ce résultat, l'estimation L^∞ pour ρ est cruciale ainsi que l'unicité de la solution du système géostrophico-barotrope non turbulent pour k fixé. Pour l'obtenir, on a besoin de l'hypothèse (H.III.5). L'unicité de la solution du système (GTB) est un problème ouvert.

III. 5 — SYSTÈME D'ÉQUATIONS PRIMITIVES AVEC DES TERMES DE PRESSION ADDITIONNELS

On termine ce mémoire en évoquant un dernier problème intervenant en océanographie étudié dans cet ensemble de travaux. Le problème étudié dans cette section finale et annexe ne fait pas intervenir la turbulence.

Dans LEWANDOWSKI [5] et l'appendice B de LEWANDOWSKI [6] on remet en question l'approximation qui consiste à négliger la dépendence en pression dans l'équation d'état $\rho = \rho(S,T,p)$ et celle qui consiste à négliger les termes de compression dans le bilan d'énergie (*cf.* GILL [1]).

Après une modélisation qui tient compte des termes de compression et de la dépendance de ρ par rapport à la pression p et où l'on fait encore de nombreuses approximations qui consistent essentiellement en des linéarisations (voir la version résumée dans LEWANDOWSKI [5], les détails dans LEWANDOWSKI [6]), on introduit le système stationnaire (EPP) où les inconnues sont $\overrightarrow{v}$, T (définies sur Ω) et p_s (définie sur Γ_s),

$$(EPP)\quad \begin{cases} (a) & -\nu_h\Delta\overrightarrow{v} - \nu_v\partial^2_{zz}\overrightarrow{v} - \rho_T\, M(\nabla T) + \rho_p\, M(\nabla p_s) + \nabla p_s = 0, \\ (b) & -\mathcal{K}_h\Delta T - \mathcal{K}_v\partial^2_{zz}T + A(p_s) = 0, \\ (c) & div\left(\displaystyle\int_{-\delta}^{0} \overrightarrow{v}\ dz\right) = 0, \\ (d) & T|_{\partial\Omega} = 0,\ \overrightarrow{v}\ |_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad \partial_z\overrightarrow{v}\ |_{\Gamma_s} = \overrightarrow{\mathrm{v}}\ . \end{cases}$$

Pour simplifier, on suppose que Ω est le cylindre $\Gamma_s \times [-\delta, 0]$, $\delta > 0$, (on note aussi Γ_s le toit de l'océan sans risque de confusion) et on pose :

$$\begin{cases} \forall\, f = f(x,y,z) \in C^0(\Omega, I\!R), \quad M(f)(x,y,z) = \displaystyle\int_z^0 f(x,y,z')\, dz', \\ \forall\, q = q(x,y) \in C^1(\omega, I\!R), \quad A(q)(x,y,z) = \alpha\, \dfrac{1 - z\rho_p}{1 + \alpha\rho_T z}\, \nabla q. \end{cases}$$

Ici, $\alpha > 0$, $\rho_T > 0$ et $\rho_p > 0$ sont des constantes.

Dans ce système, $\rho_p\, M(\nabla p_s)$ est le terme qui modélise la dépendance de ρ par rapport à la pression p dans l'équation d'état et $A(p_s)$ est le terme de compression dans le bilan d'énergie.

THÉORÈME III. 5 — *On suppose que* $\overrightarrow{\mathrm{v}} \in L^2(\Gamma_s)$. *Alors il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* (ρ_p, δ, α) *satisfaisant* $\sup(|\rho_p|, \delta, |\alpha|) < \eta$, *il existe un unique* $(\overrightarrow{v}, T, p_s) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1_0(\Omega) \times (L^2(\Gamma_s)/I\!R)$ *tel que le triplet* $(\overrightarrow{v}, T, p_s)$ *soit une solution du système* (EPP) *au sens des distributions.* ♢

Ce résultat se démontre en utilisant un argument de point fixe sur la pression superficielle p_s.

IV — BIBLIOGRAPHIE

BARANGER, J. MIKELIC, A.

[1] Solutions stationnaires pour un écoulement quasi-newtonien avec échauffement visqueux, C.R.A.S, Série I, t. 319, n°6, 637-647, (1994), et article détaillé à paraître.

CHEMIN, J.-Y.

[1] A propos d'un problème de pénalisation antisymétrique, *C.R.A.S, série I, t. 321, 861-864, (1995), et article détaillé à paraître.*

CLAIN, S.

[1] *Analyse mathématique et numérique d'un modèle de chauffage par induction*, thèse n°1240, École polytechnique fédérale de Lausanne, (1994).

Di PERNA, R.-J. LIONS , P.-L.

[1] Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. math, 511-547, (1989).*

DELECLUSE, P.

[1] Communication privée.

GALLOUËT, T. HERBIN, R.

[1] Existence of a solution to a coupled elliptic system,

GILL, A.-E.

[1] *Atmosphere-Ocean dynamics*, Academic Press, (1982).

GRENIER, E.

[1] Fluides tournants et ondes d'inerties, *C.R.A.S, série I, t 321, 711-714, (1995) et article détaillé à paraître dans Journ. Maths Pures et App.*

LEWANDOWSKI, R.

[1] Modèles de turbulence et équations paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 835-840, 1993,*

[2] Stabilization of k-Epsilon models for the Navier-Stokes Equation, *Document de travail,*

[3]The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity, *Nonlinear Analysis TMA, Vol 28, No 2, 393-417, (1997),*

[4] Sur quelques problèmes posés par l'océanographie, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, 567-572, (1995),*

[5] Étude d'un système stationnaire linéarisé d'équations primitives avec des termes de pression additionnels, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, 173-178, (1997),*

[6] *Analyse mathématique et océanographie*, collection RMA, Masson (1997),

[7] Couplage du modèle $\theta - \varphi$ avec les équations de Stokes, *manuscript,*

[8] Cours de l'Université de Seville, Juin 1994.

LEWANDOWSKI, R. MOHAMMADI, B.

[1] Existence and positivity results for the $\theta - \varphi$ model and a modified $k - \varepsilon$ model, *Maths. Models and Methods Appl. Sci., 3, No 2, p. 195-217, 1993,*

LEWANDOWSKI, R. MURAT, F.

[1] Sur un système turbulent avec une viscosité non bornée, *préprint, soumis à publication,*

LIONS , J.-L.

[1] *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier Villard, (1969),

[2] *Cours du collège de France*, notes manuscriptes, (1993-1994, 1994-1995).

LIONS , J.-L. TEMAM, R. WANG, S.

[1] Models for the coupled Atmosphere and Ocean, *Computational mechanics advances, Vol 1, n°1, 1-120, (1993),*

[2] On the equations of the large scale Ocean, *Nonlinearity, 5, 1007-1053, (1992),*

[3] New formulation of the primitive equations of Atmosphere and applications, *Nonlinearity, 5, 237-288, (1992).*

LIONS, P.-L. MURAT, F.

[1] Solutions renormalisées d'équations elliptiques, *à paraître*.

MARMOL, M. ORTEGON, P.

[1] en préparation.

MOHAMMADI, B. PIRONNEAU, O.

[1] *Analysis of the k-Epsilon model*, collection RMA, Masson, (1994).

PEDLOSKY, J.

[1] *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, (1979).

TEMAM, R.

[1] *Navier-Stokes equations,* North Holland, (1977).