ALGÈBRES DE FONCTIONS ASSOCIÉES AUX REPRÉSENTATIONS MONOMIALES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

HIDENORI FUJIWARA, GÉRARD LION [†] ET BERNARD MAGNERON [‡]

Résumé. Soit G un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ telle que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$· Soit $\ell \to \pi_\ell$ l'application de Kirillov de $\mathfrak{g}^*$ dans $\widehat{\mathrm{G}}$. Soit C^∞_τ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G})$ formé par les fonctions Φ sur G qui vérifient la relation de covariance $\Phi(g \cdot \exp \mathrm{Y}) = e^{-if(\mathrm{Y})}\,\Phi(g)$ pour tout g de G et tout Y de $\mathfrak{h}$.

On étudie ici la structure de l'algèbre Z des fonctions θ sur $\Gamma = f + \mathfrak{h}^\perp$, telles qu'il existe un élément σ de l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, pour lequel $\pi_\ell(\sigma)$ est scalaire, de scalaire $\theta(\ell)$, pour tout ℓ de Γ.

Elle est isomorphe à une sous-algèbre centrale de D_τ, l'algèbre des opérateurs différentiels sur G qui commutent avec l'action naturelle de G à gauche et qui laissent C^∞_τ stable. Cela motive son étude et nous permettra, dans un autre article, de démontrer une conjecture de Corwin-Greenleaf concernant un critère de commutativité pour D_τ.

Nous prouvons tout d'abord que Z est formée de fonctions polynomiales sur Γ. Cette algèbre peut être compliquée : on constate, même pour des exemples élémentaires, qu'elle n'est pas, en général, isomorphe à une algèbre de polynômes. Cependant, en utilisant des résultats de Corwin-Greenleaf, nous mettons en évidence une expression de son degré de transcendance, et nous en donnons des systèmes de générateurs rationnels et des bases de transcendance naturels.

Abstract: Let $\mathfrak{g}$ be a nilpotent Lie algebra, $\mathfrak{h}$ a subalgebra of $\mathfrak{g}$, G and H the corresponding simply connected Lie groups. Let $f \in \mathfrak{g}^*$ be such that $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$· Let $\ell \to \pi_\ell$ be the Kirillov application from $\mathfrak{g}^*$ to $\widehat{\mathrm{G}}$ and C^∞_τ the vector space of functions of $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G})$, such that $\Phi(g \cdot \exp \mathrm{Y}) = e^{-if(\mathrm{Y})}\,\Phi(g)$, for all g in G and Y in $\mathfrak{h}$.

Date : 2 février 2002.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22E27, 22E99.

Key words and phrases. Groupes de Lie nilpotents. Représentations monomiales. Bases de transcendance.

[† ‡] UMR n° 7586 du CNRS, « Théorie des Groupes, Représentations, Applications ».

[‡] UMR n° 7539 du CNRS, « Analyse, Géométrie et Applications ».

In this paper, we study the algebra Z of functions θ on $\Gamma = f+\mathfrak{h}^\perp$, such that there exists an element σ of the enveloping algebra $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ so that $\pi_\ell(\sigma)$ is scalar for all ℓ in Γ, with scalar value $\theta(\ell)$.

This study is motivated by the fact that Z is naturally isomorphic to a central subalgebra of D_τ, the algebra of differential operators on G which commute with the natural left-action of G and leave C^∞_τ invariant. In fact, the present results will be used in another article, to prove a conjecture of Corwin-Greenleaf about a criterion for the commutativity of D_τ.

We prove that the elements of Z are polynomial functions on Γ. This algebra may be complicated: it is not, even for some elementary examples, isomorphic to an algebra of polynomials in general. Nevertheless, using results of Corwin-Greenleaf, we find some natural systems of rational generators and transcendence basis for it, and give a simple expression of its transcendence degree.

Plan

1. Introduction et notations

1.1. **L'objet de notre étude : la sous-algèbre** Z. Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et d'élément neutre 1_G. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ *subordonnée à* $\mathfrak{h}$ (i.e. telle que $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = \{0\}$), $H = \exp \mathfrak{h}$ et χ_f le caractère de H donné par $\chi_f(\exp Y) = e^{if(Y)}$ pour $Y \in \mathfrak{h}$. On note $\Gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{h},f}$ ou simplement Γ le sous-espace affine H-invariant $f + \mathfrak{h}^\perp$ dans $\mathfrak{g}^*$. Pour $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on désigne par $(\pi_\ell, \mathscr{H}_\ell)$ l'élément du dual unitaire $\widehat{G}$ de G, associé à ℓ par l'application de Kirillov.

Soit $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Dans les notes qui suivent, nous nous intéresserons à la $\mathbb{C}$-sous-algèbre $Z(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f;\mathfrak{k})$ des fonctions θ sur $G\cdot\Gamma$, telles qu'il existe un élément σ de $\mathscr{U}(\mathfrak{k})$ pour lequel

$$\pi_\ell(\sigma) = \theta(\ell)\cdot \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^{\pm\infty}}, \quad \forall \ell \in \Gamma.$$

Autrement dit, sur Γ (et de façon équivalente, sur $G\cdot\Gamma$), $\pi_\ell(\sigma)$ est scalaire, de scalaire $\theta(\ell)$. Nous dirons que σ *est* Γ*-central.* Pour simplifier, nous poserons $Z = Z(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f) = Z(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f;\mathfrak{g})$.

Dans la section 2 suivante, nous verrons que pour que σ soit Γ-central, il suffit qu'il soit scalaire sur un sous-ensemble $\mathscr{M}$ de Γ, dont la fermeture pour la topologie ordinaire est d'intérieur non vide. Par ailleurs, il apparaîtra que les restrictions à Γ des fonctions de Z sont polynomiales.

Dans toute la suite, n désignera la dimension de $\mathfrak{g}$. On se donnera un drapeau d'idéaux d de $\mathfrak{g}$:

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on considérera la sous-algèbre $\mathrm{Z}_k = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, f; \mathfrak{g}_k)$ de Z de telle sorte que

$$\{0\} = \mathrm{Z}_0 \subseteq \mathrm{Z}_1 \subseteq \mathrm{Z}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Z}_k \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Z}_n = \mathrm{Z}.$$

1.2. **Quelques rappels, notations et conventions utiles.** Les résultats et les conventions de cette sous-section, seront utilisés plusieurs fois dans la suite et sont, en particulier, nécessaires à la compréhension des deux premières sections. D'autres conventions, utiles seulement plus loin, seront introduites dans les sous-section 3.1 et 6.1.

1.2.1. On associera à $\ell \in \mathfrak{g}^*$ (resp. $\ell \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$), la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ (resp. sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$) :

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y} \to \mathrm{B}_\ell(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \ell([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]).$$

Pour $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$, on notera $\mathfrak{l}^{\mathrm{B}_\ell}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}$ formé par les éléments B_ℓ-orthogonaux à $\mathfrak{l}$.

1.2.2. On dira qu'une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$), subordonnée à $\ell \in \mathfrak{g}$ (resp. subordonnée à $\ell \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$), est une *polarisation* si elle est isotrope maximale, en tant qu'espace vectoriel, relativement à la forme bilinéaire alternée B_ℓ.

1.2.3. Suivant les conventions habituelles, on notera L la représentation « à gauche » de G dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G})$, donnée par

$$(\mathrm{L}_g\Phi)(g') = \Phi(g^{-1}g') \quad \text{pour} \quad g, g' \in \mathrm{G}.$$

Elle induit une action de $\mathfrak{g}$ puis, par linéarité et composition, une action « à gauche » de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G})$, encore notée L et donnée par

$$\big(\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\Phi\big)(g) = \frac{d}{dt}\Phi(\exp -t\mathrm{X}\cdot g)|_{t=0}, \quad \forall \Phi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}),\ \forall g \in \mathrm{G},\ \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}.$$

De la même façon, on aura une action « à droite » R de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ donnée par

$$\big(\mathrm{R}(\mathrm{X})\,\Phi\big)(g) = \frac{d}{dt}\Phi(g\cdot \exp t\mathrm{X})|_{t=0}, \quad \forall \Phi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}),\ \forall g \in \mathrm{G},\ \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}.$$

1.2.4. La correspondance $\mathrm{A} \to {}^t\mathrm{A}$ désignera l'antiautomorphisme principal dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ tel que ${}^t\mathrm{X} = -\mathrm{X}$ pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$.

1.2.5. Dans le souci de simplifier les notations, pour toute représentation unitaire fortement continue τ de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\tau$, on notera encore τ (au lieu de $d\tau$), les représentations de l'algèbre enveloppante complexifiée $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathscr{H}_\tau^\infty$ des vecteurs C^∞ de la représentation et dans son antidual topologique : l'espace $\mathscr{H}_\tau^{-\infty}$ des vecteurs-distributions. La représentation de G dans $\mathscr{H}_\tau^\infty$ sera, quant à elle, notée τ^∞.

1.2.6. Soit maintenant $C^\infty(G, \mathfrak{h}, f)$ (ou simplement C^∞_τ) l'espace des fonctions Φ, C^∞ sur G, qui vérifient la relation

$$\Phi(g \exp Y) = e^{-if(Y)}\, \Phi(g), \qquad \forall g \in G, \qquad \forall Y \in \mathfrak{h}.$$

Dans ce qui suit, la lettre τ symbolise le couple $(\mathfrak{h}, f)$, et désigne aussi la représentation de G suivante associée à ce couple :

$$\Big(\tau = \tau(G, \mathfrak{h}, f) = \mathrm{Ind}\underset{H}{\overset{G}{\uparrow}} \chi_f, \quad \mathscr{H}_\tau = \mathscr{H}(G, \mathfrak{h}, f)\Big),$$

qui est la représentation induite par χ_f de H à G, (on dit aussi la représentation *monomiale* associée à $(\mathfrak{h}, f)$). L'espace de Hilbert $\mathscr{H}_\tau$ est le complété pour la norme hilbertienne $\|\ \|_\tau$ des fonctions Φ de C^∞_τ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que :

$$\|\Phi\|^2_\tau = \int_{G/H} |\Phi|^2(g)\, d\dot{g} < \infty$$

de telle sorte que $\big(\tau(g)\, \Phi\big)(g') = \Phi(g^{-1}g'), \quad \forall g, g' \in G.$

On sait (voir Grélaud-Corwin-Greenleaf, [C-G-G], [C-G2] theorem 1.2 et Lipsman, [L]), qu'on a une désintégration centrale de τ donnée par

$$(\tau, \mathscr{H}_\tau) \simeq \int^\oplus_{G\backslash\Gamma} (\tau_\ell, \mathscr{H}_{\tau_\ell})\, d\dot{\ell},$$

où $d\dot{\ell}$ est la mesure image sur $G\backslash\Gamma$ d'une mesure finie équivalente à une mesure de Lebesgue $d\ell$ sur Γ par la projection naturelle. La représentation $(\tau_\ell, \mathscr{H}_{\tau_\ell})$ est $d\dot{\ell}$-presque-partout une représentation factorielle quasi-équivalente à π_ℓ, de multiplicité égale au nombre (fini ou infini) de H-orbites disjointes, contenues dans $G \cdot \ell \cap \Gamma$.

Les travaux de Penney, [Pen] et de Bonnet, [Bon] conduisent à des désintégrations analogues au niveau des vecteurs C^∞ et des vecteurs-distributions :

$$(1.2.6.1) \qquad (\tau^{\pm\infty}, \mathscr{H}_{\tau^{\pm\infty}}) \simeq \int^\oplus_{G\backslash\Gamma} (\tau_\ell^{\pm\infty}, \mathscr{H}_{\tau_\ell^{\pm\infty}})\, d\dot{\ell},$$

1.2.7. Rappelons quelques résultats relatifs à l'application de Kirillov. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$. Choisissons une polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ. On sait que, indépendamment du choix de $\mathfrak{p}$, la représentation $\tau(G, \mathfrak{p}, \ell)$ fournit une réalisation des représentations $(\pi_\ell, \mathscr{H}_\ell)$ de G et de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$.

Soit $2p$ le rang de la forme bilinéaire B_ℓ sur $\mathfrak{g}$. Rappelons comment on peut réaliser les représentations π_ℓ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p)$ des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^p$ (qui s'identifie à $\mathscr{H}_\ell^\infty$) et dans son antidual $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^p)$, l'espace des distributions tempérées (qui s'identifie à $\mathscr{H}_\ell^{-\infty}$).

On choisit une *base supplémentaire adaptée* $\{X_k\}_{1\leqslant k\leqslant p}$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire telle que, pour $0 \leqslant j \leqslant p$, les sous-espaces $\mathfrak{p} \underset{1\leqslant k\leqslant j}{\oplus} \mathbb{R}X_k$ forment une suite croissante de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ de dimension $\dim \mathfrak{p} + j$. En particulier, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \underset{1\leqslant k\leqslant p}{\oplus} \mathbb{R}X_k$.

Tout élément g de G peut alors s'écrire, de façon unique, sous la forme $g = \exp x_p \mathrm{X}_p \cdot \ldots \cdot \exp x_1 \mathrm{X}_1 \cdot \exp \mathrm{Y}$ avec $(x_1 \ldots x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{Y} \in \mathfrak{p}$.

Notons V l'isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p)$ dans $\mathscr{H}_\ell^\infty$ donné par

$$(\mathrm{V}\Phi)(\exp x_p \mathrm{X}_p \cdot \ldots \cdot \exp x_1 \mathrm{X}_1 \cdot \exp \mathrm{Y}) = e^{-i\ell(\mathrm{Y})}\, \Phi(x_1 \ldots x_p),$$
$$\forall (x_1 \ldots x_p) \in \mathbb{R}^p,\ \forall \mathrm{Y} \in \mathfrak{p}.$$

On peut alors réaliser les représentations π_ℓ de G et de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p)$, par les formules :

$$\begin{array}{rclcl} \pi_\ell(g) & = & \mathrm{V}^{-1}\, \mathrm{L}_g\, \mathrm{V} & \text{pour} & g \in \mathrm{G}, \\ \pi_\ell(\mathrm{U}) & = & \mathrm{V}^{-1}\, \mathrm{L}(\mathrm{U})\, \mathrm{V} & \text{pour} & \mathrm{U} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}). \end{array}$$

Par adjonction, on obtient des réalisations des représentations π_ℓ dans $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^p)$, qui sont aussi les uniques prolongements continus des représentations précédentes.

1.3. **L'isomorphisme $\mathrm{Z} \simeq \mathrm{CR}(\tau^\infty) \cap \tau(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$: une première motivation pour l'étude de Z.** Soit $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\tau^\infty)$ l'espace des endomorphismes continus de $\mathscr{H}_\tau^\infty$, pour sa topologie naturelle d'espace de Fréchet. Notons $\mathrm{R}(\tau^\infty)$, le sous-anneau centralisateur de $\tau^\infty(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\tau^\infty)$ et $\mathrm{CR}(\tau^\infty)$ son centre. Utilisant la désintégration (1.2.6.1), on voit qu'il est formé par les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\tau^\infty)$ qui s'écrivent sous la forme

$$\int_{\mathrm{G}\backslash\Gamma}^{\oplus} \theta_0(\ell)\, \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_{\tau_\ell}^\infty}\, d\dot{\ell}$$

où θ_0 est une fonction mesurable, définie à un ensemble de mesure nulle près. On a alors la

Proposition 1.3.1. *L'application* $\theta \to \int_{\mathrm{G}\backslash\Gamma}^{\oplus} \theta(\ell)\, \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_{\tau_\ell}^\infty}\, d\dot{\ell}$ *définit un isomorphisme entre* Z *et* $\mathrm{CR}(\tau^\infty) \cap \tau(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$.

Démonstration. Soit σ un élément de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\tau(\sigma) \in \mathrm{CR}(\tau^\infty)$, alors il existe une fonction θ_0, $d\dot{\ell}$-mesurable et H-invariante sur Γ avec

$$\int_{\mathrm{G}\backslash\Gamma}^{\oplus} \tau_\ell(\sigma)\, d\dot{\ell} = \int_{\mathrm{G}\backslash\Gamma}^{\oplus} \theta_0(\ell)\, \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_{\tau_\ell}^\infty}\, d\dot{\ell}.$$

Ce qui signifie que $d\dot{\ell}$-presque partout $\pi_\ell(\sigma)$ est scalaire, de scalaire $\theta_0(\ell)$. D'après les remarques de la sous-section 1.1, cela entraîne que σ est Γ-central. Il existe donc une fonction θ de Z telle que $\pi_\ell(\sigma) = \theta(\ell)\, \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_{\pi_\ell}^\infty}$ partout sur Γ et on a $\theta_0(\ell) = \theta(\ell)$, $d\dot{\ell}$-presque-partout. D'où le résultat. $\square$

1.4. **L'injection canonique de Z dans CD_τ : la motivation principale de l'étude de Z.** Dans cette sous-section, nous montrons que Z est isomorphe à une certaine sous-algèbre commutative d'opérateurs différentiels invariants sur G. C'est la principale des motivations qui nous ont conduits à son étude.

Soit $\mathrm{D}(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f)$ ou simplement D_τ, l'algèbre des opérateurs différentiels sur G qui laissent C^∞_τ stable et qui commutent avec l'action L de G. Ses éléments sont à coefficients C^∞. Soit $\mathrm{CD}_\tau = \mathrm{CD}(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f)$ le centre de D_τ. Soit $\mathscr{U}(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f)$ la sous-algèbre formée par les éléments B de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ tels que

$$\mathrm{R(B)}\,\mathrm{C}^\infty_\tau \subseteq \mathrm{C}^\infty_\tau.$$

Rappelons que pour tout élément ζ de D_τ, il existe un élément A, non unique en général, dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g},\mathfrak{h},f)$ tel que $\zeta\,\Phi = \mathrm{R(A)}\,\Phi$ sur C^∞_τ. (Voir [C-G3], th. 4.1, pour les détails).

Proposition 1.4.1. *On a un homomorphisme injectif de $\mathbb{C}$-algèbres commutatives , noté Δ, de Z dans CD_τ et donné par*

$$\Delta(\theta) = \mathrm{L}(\sigma)|_{\mathrm{C}^\infty_\tau} = \mathrm{R}({}^t\sigma)|_{\mathrm{C}^\infty_\tau},$$

pour tout $\theta \in \mathrm{Z}$ et tout $\sigma \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ tels que sur Γ, $\pi_\ell(\sigma)$ soit scalaire, de scalaire $\theta(\ell)$.

Remarques 1.4.2. 1) On voit donc que Z peut se réaliser comme une sous-algèbre de CD_τ. Corwin et Greenleaf ont constaté dans [C-G3], theorem 1.1, qu'on a $\mathrm{D}_\tau = \mathrm{CD}_\tau$ dans le cas où τ est à multiplicités finies. Même dans cette dernière hypothèse, Z est en général, une sous-algèbre propre de CD_τ.

2) On sait que D_τ est une $\mathbb{C}$-sous-algèbre intègre (voir [C-G3], lemme 4.3). Il en est donc de même de Z. Ce résultat découlera aussi du fait, déjà mentionné dans la sous-section 1.1 et démontré dans la section 2, que les éléments de Z sont des fonctions polynomiales sur Γ.

Démonstration. a) Il est clair que $\mathrm{L}(\sigma)$ laisse C^∞_τ stable.

b) Montrons que $\mathrm{L}(\sigma)|_{\mathrm{C}^\infty_\tau} \in \mathrm{D}_\tau$, lorsque θ et σ sont comme dans l'énoncé, et que cet opérateur est nul dès que $\theta = 0$. On a

$$\mathrm{L}_g|_{\mathscr{H}^\infty_\tau} = \tau^\infty(g) = \int_{\mathrm{G}\backslash\Gamma} \tau^\infty_\ell(g)\; d\dot{\ell}.$$

De même,

$$\mathrm{L}(\sigma)|_{\mathscr{H}^\infty_\tau} = \tau(\sigma) = \int_{\mathrm{G}\backslash\Gamma} \theta(\ell)\;\; \mathrm{Id}_{\mathscr{H}^\infty_{\tau_\ell}}\;\; d\dot{\ell}$$

avec $\mathrm{L}(\sigma)|_{\mathscr{H}^\infty_\tau} = 0$ dès que $\theta = 0$.

On a donc $[\mathrm{L}(\sigma), \mathrm{L}_g]|_{\mathscr{H}^\infty_\tau} = 0$ puisque les opérateurs L_g et $\mathrm{L}(\sigma)$ se diagonalisent simultanément. On en déduit par prolongement continu que

$$[\mathrm{L}(\sigma), \mathrm{L}_g]\big|_{\mathrm{C}^\infty_\tau} = 0 \tag{1.4.1}$$

avec $\theta = 0 \Rightarrow \tau(\sigma) = 0 \Rightarrow \mathrm{L}(\sigma)\big|_{\mathrm{C}^\infty_\tau} = 0$.

Cela prouve l'existence de l'application Δ de Z dans D_τ.

c) Prouvons maintenant que $\Delta(\mathrm{Z}) \subseteq \mathrm{CD}_\tau$. Pour cela, il suffit de remarquer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et toute fonction Φ de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G})$, on a évidemment $\mathrm{R(A)}\,\mathrm{L}(\sigma)\,\Phi = \mathrm{L}(\sigma)\,\mathrm{R(A)}\,\Phi$ et d'utiliser la remarque qui précède l'énoncé de la proposition.

d) Vérifions enfin que $\mathrm{L}(\sigma)\big|_{\mathrm{C}^\infty_\tau} = \mathrm{R}({}^t\sigma)\big|_{\mathrm{C}^\infty_\tau}$. (Ce résultat se trouve aussi dans [C-G3], lemma 5.1).

La formule 1.4.1 entraîne que pour $\Phi \in \mathrm{C}^\infty_\tau$, on a $\forall g \in \mathrm{G}$,

$$\big(\mathrm{L}(\sigma)\,\Phi\big)\,(g) = \big(\mathrm{L}_{g^{-1}}\mathrm{L}(\sigma)\,\Phi\big)\,(e) = \big(\mathrm{L}(\sigma)\,\mathrm{L}_{g^{-1}}\Phi\big)\,(e) =$$
$$\big(\mathrm{R}({}^t\sigma)\,\mathrm{L}_{g^{-1}}\Phi\big)\,(e) = \big(\mathrm{L}_{g^{-1}}\,\mathrm{R}({}^t\sigma)\Phi\big)\,(e) = \big(\mathrm{R}({}^t\sigma)\,\Phi\big)\,(g),$$

comme prévu. □

1.5. **Bases et degré de transcendance des anneaux commutatifs intègres.** Dans cette sous-section, nous faisons quelques rappels concernant les notions de degré de transcendance pour les anneaux intègres, nécessaires pour la compréhension de nos motivations (voir la sous-section 1.6) et à la formulation des énoncés de nos principaux résultats (voir la sous-section 4.1). D'autres rappels sur ces questions, utilisés dans les démonstrations, seront donnés plus loin, dans la sous-section 6.6.

Soit $\mathscr{A}$ un anneau commutatif à élément unité, K un sous-anneau de $\mathscr{A}$ contenant l'unité et $\Theta = \{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{A}$.

Notons $\mathrm{K}[\{\mathrm{X}_j\}_{j\in\mathscr{J}}]$, la K-algèbre des polynômes à coefficients dans K ayant pour indéterminées un nombre fini des variables X_j, puis $\mathrm{K}[\{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}]$ le plus petit sous-anneau de $\mathscr{A}$ contenant K et les θ_j ($j \in \mathscr{J}$) et enfin φ l'homomorphisme surjectif naturel de $\mathrm{K}[\{\mathrm{X}_j\}_{j\in\mathscr{J}}]$ sur $\mathrm{K}[\{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}]$.

Lorsque la surjection φ est une bijection, on dit que le système Θ est *algébriquement libre* ou *transcendant* sur K. Sinon, on dit que le système Θ est *algébriquement lié sur* K. Si $\mathrm{P} \in \ker\varphi\setminus\{0\}$, on dit que $\mathrm{P}(\{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}) = 0$ est une *relation de dépendance algébrique des* $\{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, (sur K dans $\mathscr{A}$).

Soit $\theta \in \mathscr{A}$. Lorsque le système $\{\theta\}$, formé d'un seul élément, est algébriquement lié sur K, on dit que θ est *algébrique sur* K. Cela équivaut à dire qu'il existe une relation $a_m\theta^m + \cdots + a_0 = 0$ où les a_p $(0 \leqslant p \leqslant m)$ sont dans K avec $a_m \neq 0$. Soit E une partie de $\mathscr{A}$. On dit que E est *algébrique sur* K, si tous ses éléments sont algébriques sur K.

On dit que le système Θ est *algébriquement générateur sur* K, si tout élément θ de $\mathscr{A}$ est algébrique sur $\mathrm{K}[\{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}]$. Cela équivaut à dire qu'il existe q éléments $\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_q}$ de $\{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ et une relation

$$a_m\,\theta^m + \cdots + a_0 = 0 \text{ avec } a_p \in \mathrm{K}[\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_q}] \text{ pour } 0 \leqslant p \leqslant m \text{ et } a_m \neq 0.$$

Dans le cas particulier où, pour tout élément θ de $\mathscr{A}$, on a $n = 1$ et une relation de la forme

$$a_1\,\theta + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0,\, a_1 \in \mathrm{K}[\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_q}] \text{ et } a_1 \neq 0.$$

on dira que Θ est un *système de générateurs rationnels sur* K.

Les systèmes transcendants sont ordonnés inductivement pour l'inclusion et possède donc des éléments maximaux qui sont aussi des systèmes algébriquement générateurs. De même, les systèmes algébriquement générateurs sont ordonnés inductivement pour l'inclusion inverse et possèdent donc des éléments minimaux qui sont aussi des systèmes algébriquement libres.

On dit qu'une familles Θ de $\mathscr{A}$ est une base de transcendance de $\mathscr{A}$ sur K lorsqu'elle est à la fois un système algébriquement libre et générateur de $\mathscr{A}$ sur K. D'après ce qui précède, il en existe.

Il est évidemment très classique que lorsque K et $\mathscr{A}$ sont des corps, toutes les bases de transcendance de $\mathscr{A}$ sur K ont le même cardinal, appelé de *degré de transcendance* de A sur K et noté $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Z}$ (voir, par exemple, [Bo], chap. V, § 5, théorème 3).

Rappelons qu'on a une analogie formelle entre les propriétés des systèmes algébriquement libres et liés, des bases et du degré de transcendance pour les extensions de corps d'une part et celles de systèmes libres et liés, des bases et de la dimension pour les espaces vectoriels sur un corps de l'autre. Ces analogies ne sont pas le fruit du hasard : les raisons de leur existence sont données dans Zariski-Samuel, [Z-S], ch. II, § 12.

Le fait que les bases de transcendance aient même cardinal et la notion de degré de transcendance s'étendent aussi au cas où $\mathscr{A}$ (et, par conséquent, K) est un anneau intègre, du fait du résultat suivant (voir aussi [Z-S], ch. II, § 12, remarques suivant le th. 27).

Proposition 1.5.1. *Soit* $\mathscr{A}$ *un anneau* intègre *à élément unité, et* K *un sous-anneau de* $\mathscr{A}$ *qui contient l'unité. Soit* $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ *et* $\mathrm{Q}(\mathrm{K})$ *leur corps de fractions rationnelles. Alors l'ensemble* (non vide) *des systèmes algébriquement libres* (resp. *des systèmes algébriquement générateurs*, resp. *des bases de transcendance*) *de* $\mathscr{A}$ *sur* K *coïncide avec l'ensemble des systèmes algébriquement libres* (resp. *des systèmes algébriquement générateurs*, resp. *des bases de transcendance*) *de* $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ *sur* $\mathrm{Q}(\mathrm{K})$ *contenus dans* $\mathscr{A}$.

Démonstration. Soit $\Theta = \{\theta_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{A}$.

a) Si le système Θ est (algébriquement) libre sur Q(K), il est évidemment libre sur K.

Réciproquement, si Θ est (algébriquement) lié sur Q(K), on obtient une relation de dépendance algébrique sur K, en réduisant au même dénominateur une relation de dépendance algébrique sur Q(K) et alors Θ est bien lié sur K.

b) Si Θ est (algébriquement) générateur de $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ sur Q(K), il est générateur de $\mathscr{A}$ sur Q(K) : pour tout θ de $\mathscr{A}$, il existe une relation de dépendance algébrique sur Q(K), qui lie θ à des éléments de Θ. En réduisant cette relation au même dénominateur, on obtient une relation de dépendance algébrique sur K des mêmes éléments. Finalement, Θ est générateur de $\mathscr{A}$ sur K.

Montrons, réciproquement, que si Θ est générateur de $\mathscr{A}$ sur K, il est générateur de $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ sur Q(K). Soit K(Θ) le corps engendré par Θ dans $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$. Les éléments de $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ algébriques sur K(Θ), forment un sous-corps de $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ ([Bo], chap. V, § 3 n°2, prop. 6). Ce sous-corps contient évidemment $\mathscr{A}$, il est donc égal à $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$. Pour tout θ de $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$, il existe donc une expression polynomiale non triviale de la variable θ à coefficients dans K(Θ) qui est nulle. Réduisant ces coefficients au même dénominateur, on obtient bien une expression polynomiale non triviale de θ à coefficients dans $\mathrm{K}[\Theta]$. □

Dans les mêmes hypothèses, supposons qu'on ait une suite de sous-algèbres

$$\{0\} = \mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{A}_n = \mathscr{A}.$$

Alors, en utilisant le « théorème d'échange », ([Bo], chap. V § 5, n°2, corollaire) et la proposition 1.5.1, il est possible de montrer l'existence d'une base de transcendance Θ telle que, pour chaque k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\Theta \cap \mathscr{A}_k$ soit une base de transcendance de $\mathscr{A}_k$. Nous rappelons l'énoncé de ce théorème :

Théorème 1.5.2. *Soit $\mathscr{A}$ un anneau intègre à élément unité. Soit* S *une partie de $\mathscr{A}$ algébriquement génératrice sur* K *et* L *une partie de $\mathscr{A}$ algébriquement libre sur* K, *alors il existe une partie* S' *de* S *telle que*

a) $\mathrm{L} \cup \mathrm{S}'$ *est une base de transcendance de $\mathscr{A}$ sur* K.

b) $\mathrm{L} \cap \mathrm{S}' = \emptyset$.

En particulier, si S (resp. L) *est une partie algébriquement génératrice* (resp. *algébriquement libre*) *de $\mathscr{A}$, il existe une base de transcendance* T *de $\mathscr{A}$ telle que* $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$ (resp. $\mathrm{L} \subset \mathrm{T}$).

1.6. **Motivations pour la suite.** Le but des notes qui suivent est d'exhiber un système de générateurs rationnels Θ_{R} et une base de transcendance Θ de Z sur $\mathbb{C}$ tels que pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\Theta_{\mathrm{R}} \cap \mathrm{Z}_k$ (resp. $\Theta \cap \mathrm{Z}_k$) soit un système de générateurs rationnels (resp. une base de transcendance) de Z_k sur $\mathbb{C}$. On utilise pour cela les suites de Corwin-Greenleaf de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, telles qu'elles sont données dans [C-G3], theorem 3.1.

Les résultats obtenus seront valables aussi bien lorsque τ est à multiplicités infinies que lorsqu'elle est à multiplicités finies, (par exemple, pour la représentation régulière gauche).

Les démonstrations se font le plus souvent par récurrence sur la dimension de G. On utilise d'une part des propriétés du degré de transcendance, et de l'autre des chemins différentiels adéquats qui, par des passages à la limite, permettent de montrer l'existence ou l'absence de certains types de relations algébriques.

Remerciements. Nous remercions, d'une part l'Université Paris 13 qui a invité H. Fujiwara pour un séjour d'un mois à Paris en juin 1999, de l'autre le Ministère de l'Éducation du Japon qui a partiellement financé ce travail en lui attribuant la subvention n°11640189.

La collaboration qui a ainsi été rendue possible, nous a permis d'étudier une conjecture de Corwin-Greenleaf sur la commutativité de certaines algèbres d'opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^p$ associées aux groupes de Lie nilpotents (voir [C-G3], section 8, question 5). Les résultats ont été annoncés dans [F-L-M-M].

Cette étude nous a amenés, entre autre, à la rédaction du présent article. Plus précisément, un corollaire (lemme du théorème 3.2 de [F-L-M-M]), de notre résultat principal (théorème 4.1.2 du présent article), qui concerne

la structure de CD_τ, apparaît comme une clef de la démonstration de la conjecture de Corwin-Greenleaf. Nous reviendrons très bientôt et en détail, sur ces questions.

Par ailleurs, nous remercions Jean-Yves Charbonnel et Charles Torossian, qui nous ont indiqué comment démontrer les résultats de la section 2 qui suit.

2. Éléments Γ-centraux et fonctions polynomiales

2.1. **Le résultat principal.** Cette section est consacrée à la démonstration du résultat ci-dessous. La connaissance des détails de cette démonstration n'est pas nécessaire pour la compréhension de la suite.

Théorème 2.1.1. *Soit* $\sigma \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$, *les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\ell \to \pi_\ell(\sigma)$ *est scalaire sur un sous-ensemble non vide* $\mathscr{M}$, *dense dans un ouvert de* Γ *pour la topologie ordinaire : il existe une fonction* $\theta_0 : \ell \to \theta_0(\ell)$ *sur* $\mathscr{M}$ *telle que* $\pi_\ell(\sigma) = \theta_0(\ell)\ \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ *pour tout* ℓ *dans* $\mathscr{M}$.

(ii) $\ell \to \pi_\ell(\sigma)$ *est scalaire partout sur* $\mathrm{G}\cdot\Gamma$: *il existe une fonction* $\theta : \ell \to \theta(\ell)$ *telle que sur* $\mathrm{G}\cdot\Gamma$, $\pi_\ell(\sigma) = \theta(\ell)\ \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$.

Cette fonction est polynomiale sur Γ *et* G*-invariante sur* $\mathrm{G}\cdot\Gamma$ (*en particulier, elle est* H*-invariante sur* Γ).

Après quelques rappels et quelques remarques préliminaires, la démonstration de ce théorème sera donnée dans la section 2.4.

On utilisera la théorie de Dixmier (voir [D2], chapitre 6), concernant les idéaux primitifs de l'algèbre $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et des résultats de géométrie élémentaires rappelés, par exemple, par Humphreys (voir [H], chapter 1).

Soient $\lambda \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ subordonnée à λ. Soit $\mathscr{A}_{\mathfrak{b},\lambda}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathrm{Y} - \lambda(\mathrm{Y})\}_{\mathrm{Y}\in\mathfrak{b}}$ dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. On pose

$$\mathrm{M}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda) = \mathscr{U}(\mathfrak{g})/(\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathscr{A}_{\mathfrak{b},\lambda})$$

et on note $\rho(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)$ la représentation (induite) naturelle de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dans le $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$-module $\mathrm{M}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)$.

Lorsque l'algèbre de Lie est quelconque, on peut considérer la forme $\lambda\tilde{}$ sur $\mathfrak{b}$ donnée par

$$\lambda\tilde{} = \lambda|_{\mathfrak{b}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}},$$

constater que $\lambda\tilde{}([\mathfrak{b},\mathfrak{b}]) = \{0\}$ et noter $\rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda) = \rho(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda\tilde{})$ la représentation induite correspondante (qu'on dit *tordue*). Mais dans le cas nilpotent qui nous concerne, les représentations ρ et $\rho\tilde{}$ coïncident.

Dans les deux sous-sections suivantes, nous introduisons des objets utiles pour la démonstration du théorème, en précisant certaines de leur propriétés.

2.2. **Sur certains sous-ensembles fermés remarquables.** Les résultats donnés dans ce paragraphe sont vérifiés lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie *quelconque.*

On munit $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$ et $\mathbb{C}$ de leur structure naturelle de variétés algébriques affines. Pour r entier tel que $1 \leqslant r \leqslant n = \dim \mathfrak{g}$, on note $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, r)$ la grassmannienne des $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de dimension (complexe) r, munie de sa structure naturelle de variété algébrique projective. On note $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, la variété algébrique union disjointe $\bigcup_{1\leqslant r\leqslant n} \mathrm{Gr}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, r)$.

On considère $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathbb{C}$ munis de leur structure naturelle de variétés algébriques produits. Dans cette démonstration, les notations q_1, q_2 et q_3 désignent les projections naturelles suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{q}_1 : \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*},\\
&\mathrm{q}_2 : \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathbb{C},\\
&\mathrm{q}_3 : \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{W} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Soit $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W},r}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, r)$ formé par les couples $(\lambda, \mathfrak{b})$ tels que $\mathfrak{b}$ soit une sous-algèbre de dimension r, subordonnée à λ et telle que $\rho^{\sim}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)(\mathrm{W})$ soit scalaire. Soit $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}}$, l'union disjointe $\bigcup_{1\leqslant r\leqslant n} \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W},r}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

On note $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}$ la fonction sur $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}}$ telle que

$$\rho^{\sim}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)(\mathrm{W}) = \widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b})\ \mathrm{Id}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{b},\lambda^{\sim})}\,.$$

On pose $\mathrm{F}_{\mathrm{W}} = \mathrm{q}_1(\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}})$, (resp. $\mathrm{F}_{\mathrm{W},r} = \mathrm{q}_1(\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W},r})$). C'est le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$ formé par les éléments λ tels qu'il existe une sous-algèbre (resp. une sous-algèbre de dimension r), subordonnée à λ et telle que $\rho^{\sim}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)(\mathrm{W})$ soit scalaire. On a alors le

Proposition 2.2.1. 1) *Les sous-ensembles* $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W},r}$ *et* $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}}$ *de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ *sont des fermés de Zariski. La fonction* $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}} : \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}} \to \mathbb{C}$ *est rationnelle.*

2) *Les* $\mathrm{F}_{\mathrm{W},r}$ *et* $\mathrm{F}_{\mathrm{W}} = \bigcup_{1\leqslant r\leqslant n} \mathrm{F}_{\mathrm{W},r}$ *sont des fermés de Zariski de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$.

Démonstration. 1) Un résultat de Conze et Duflo ([C-D]), repris en détail par Dixmier ([D2], lemme 6.4.1), affirme que les $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W},r}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ sont des fermés de Zariski de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, r)$ et que la restriction de $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}$ à $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W},r}$ est une fonction rationnelle. Cela est équivalent à notre résultat.

2) Le fait que les $\mathrm{F}_{\mathrm{W},r}$ et par conséquent les F_{W} sont fermés découle immédiatement du fait que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, r)$ est une variété projective et, par conséquent, *complète* (voir [H], section 6.2). Cela signifie en particulier, que la projection q_1 est fermée, ce qui entraîne le résultat. $\square$

Soit $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{F_W} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$. On pose $\widetilde{\mathrm{E}} = \mathrm{q}_1^{-1}(\mathrm{E}) \cap \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}}$ et on définit $\widetilde{\mathrm{E}}^+$ comme le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ formé par les triplets $(\lambda, \mathfrak{b}, \widetilde{\zeta})$ tels que :

α) $\lambda \in \mathrm{E}$.
β) $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre subordonnée à λ.
γ) $\rho\tilde{\ }(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)(\mathrm{W})$ est scalaire, de scalaire $\widetilde{\zeta}$.

On pose $\mathrm{E}^+ = \mathrm{q}_2(\widetilde{\mathrm{E}}^+)$. C'est le sous-ensemble des couples (λ, ζ) de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathbb{C}$ tels qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{b}$, subordonnée à λ telle que $\rho\tilde{\ }(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)(\mathrm{W})$ soit scalaire, de scalaire ζ.

Proposition 2.2.2. 1) *Si* E *est un fermé de Zariski de* $\mathrm{F_W} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$, *il en est de même de* E^+ *dans* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathbb{C}$.

2) *On suppose que* E *est fermé et irréductible dans* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$. *Soit* r *le plus petit entier tel que* $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{W},r} \neq \emptyset$, *alors* $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{F}_{\mathrm{W},r}$.

3) *On suppose que* E *est fermé et irréductible dans* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$ *et que le fermé* E^+ *dans* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathbb{C}$ *est le graphe d'une fonction de* E *dans* $\mathbb{C}$. *Alors* E^+ *est fermé et irréductible.*

Démonstration. 1) Le sous-ensemble $\widetilde{\mathrm{E}}$ est fermé dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, comme image réciproque d'un fermé. En particulier, c'est une sous-variété algébrique. Celle-ci est *séparée* comme $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$ et $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. (Voir Humphreys, [H], section 2.5, examples (2) and (3)).

Par ailleurs, $\widetilde{\mathrm{E}}^+$ est le graphe dans $\widetilde{\mathrm{E}} \times \mathbb{C}$ de la fonction $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}|_{\widetilde{\mathrm{E}}}$ qui est un morphisme de variétés d'après la fin du 1) de la proposition 2.2.1. Les variétés $\widetilde{\mathrm{E}}$ et $\mathbb{C}$ étant séparées, cela entraîne (voir [H], section 2.5, proposition), que c'est un fermé de $\widetilde{\mathrm{E}} \times \mathbb{C}$ et de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \times \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$.

La variété $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ étant complète, la projection q_2 est fermée et E^+ est fermé. D'où le 1).

2) Cela découle immédiatement du fait que, d'après la proposition 2.2.1, les $\mathrm{F}_{\mathrm{W},r}$ sont fermés et que E est irréductible.

3) Soit $\widetilde{\mathrm{E}} = \bigcup_{i=1}^{q} \widetilde{\mathrm{E}}_i$, la décomposition en composantes irréductibles de $\widetilde{\mathrm{E}}$. On a $\mathrm{E} = \bigcup_{i=1}^{q} \mathrm{q}_1(\widetilde{\mathrm{E}}_i)$ où les $\mathrm{q}_1(\widetilde{\mathrm{E}}_i)$ sont des fermés qui recouvrent E. Comme E est irréductible, l'une des composantes $\widetilde{\mathrm{E}}_i$, par exemple $\widetilde{\mathrm{E}}_1$, est telle que $\mathrm{q}_1(\widetilde{\mathrm{E}}_1) = \mathrm{E}$.

Posons $\widetilde{\mathrm{E}}_1^+ = \mathrm{q}_3^{-1}(\widetilde{\mathrm{E}}_1) \cap \widetilde{\mathrm{E}}^+$. On sait que, du fait que $\widetilde{\mathrm{E}}_1^+$ est le graphe du morphisme $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}|_{\widetilde{\mathrm{E}}_1}$ de la variété séparée $\widetilde{\mathrm{E}}_1$ dans la variété séparée $\mathbb{C}$, la projection q_3 induit un isomorphisme de $\widetilde{\mathrm{E}}_1^+$ sur $\widetilde{\mathrm{E}}_1$. (Voir Humphreys [H], § 2.5, exercice 9). En particulier, $\widetilde{\mathrm{E}}_1^+$ est fermé et irréductible comme $\widetilde{\mathrm{E}}_1$.

Comme on a $\mathrm{q}_1\big(\mathrm{q}_3(\widetilde{\mathrm{E}}_1^+)\big) = \mathrm{E}$, on a $\mathrm{q}_2(\widetilde{\mathrm{E}}_1^+) = \mathrm{E}^+$ du fait que E^+ est un graphe. Par conséquent, E^+ est irréductible comme $\widetilde{\mathrm{E}}_1^+$. □

2.3. **Idéaux primitifs et fonctions ζ_{W}.** Tous les résultats de cette sous-section sont valables lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble (ce qui entraîne que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est complètement résoluble), à l'exception peut-être de ceux qui concernent les vecteurs C^{∞} des représentations unitaires, qui semblent n'être bien connus que dans le cas nilpotent.

On note $\operatorname{Prim}\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et Adj le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Nous utiliserons le résultat suivant :

Rappels 2.3.1. *On suppose $\mathfrak{g}$ résoluble. On a une application*

$$\lambda \to \mathrm{I}(\lambda) \quad \textit{de} \quad \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \quad \textit{dans} \quad \operatorname{Prim}\mathscr{U}(\mathfrak{g})$$

qui induit une bijection $\operatorname{Adj}\backslash\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \to \operatorname{Prim}\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ *telle que*

1) *Il existe des polarisations $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ en λ. Pour ces polarisations, on a* $\ker\tilde{\rho}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}, \lambda) = \mathrm{I}(\lambda)$.

2) *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre subordonnée à λ, on a*

$$\ker\tilde{\rho}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda) \subseteq \mathrm{I}(\lambda).$$

Démonstration. La démonstration du 1) se trouve dans Dixmier, [D2], théorème 6.5.12 et la démonstration du 2) dans [D2], lemme 6.4.3. □

Nous montrons maintenant que, lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble, l'hypothèse supplémentaire introduite dans le 3) de la proposition 2.2.2 est automatiquement satisfaite. Cela signifie, qu'étant données $\lambda \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$ et deux sous-algèbres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ subordonnées à λ telles que $\tilde{\rho}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)$ et $\tilde{\rho}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}', \lambda)$ soient scalaires, de scalaires respectifs ζ et ζ', alors on a $\zeta = \zeta'$. Avant d'énoncer la proposition correspondante, nous notons le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2.3.2. *On suppose $\mathfrak{g}$ résoluble. On se fixe $\mathrm{W} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$.*

1) *Soit (ρ, V) une représentation de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. On a l'équivalence des deux propriétés ci-dessous :*

(i) $\rho(\mathrm{W})$ *est scalaire, de scalaire ζ : $\exists\zeta \in \mathbb{C}$ tel que* $\rho(\mathrm{W}) = \zeta \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{V}}$.

(ii) $\mathrm{W} \in \ker\rho + \mathbb{C}$.

On a alors $\mathrm{W} \equiv \zeta \mod \ker\rho$.

2) *Soit (ρ', V') une seconde représentation de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ telle que* $\ker\rho' \subseteq \ker\rho$. *On suppose que $\rho'(\mathrm{W})$ est scalaire, de scalaire ζ. Alors $\rho(\mathrm{W})$ est également scalaire, de scalaire ζ.*

Démonstration. 1) Montrons l'équivalence (i)⇔(ii) :

$$\rho(\mathrm{W}) = \zeta \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{V}} \iff \rho(\mathrm{W} - \zeta) = 0 \iff \mathrm{W} \equiv \zeta \mod \ker\rho.$$

2) Si $\ker\rho' \subseteq \ker\rho$ et $\mathrm{W} \equiv \zeta \mod \ker\rho'$, alors

$$\mathrm{W} \equiv \zeta \mod \ker\rho, \quad \text{du fait que } \ker\rho' \subseteq \ker\rho \text{ et que } \ker\rho \cap \mathbb{C} = \{0\}\cdot$$

D'où $\rho(\mathrm{W}) = \zeta\,\mathrm{Id}_{\mathrm{V}}$ et le lemme. □

Proposition 2.3.3. *On suppose* $\mathfrak{g}$ *résoluble. On se fixe* $\mathrm{W} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$. *Soit* $\lambda \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$. *Les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{W} \in \mathrm{I}(\lambda) \oplus \mathbb{C}$.

(ii) $\lambda \in \mathrm{F_W}$. *Autrement dit, il existe une sous-algèbre* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, *subordonnée à* λ *telle que* $\rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda)(\mathrm{W})$ *soit scalaire, de scalaire* $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b})$.

Lorsque ces propriétés équivalentes sont vérifiées, $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b})$ *ne dépend pas du choix de* $\mathfrak{b}$. *Par conséquent, il existe une fonction* $\zeta_{\mathrm{W}} : \mathrm{F_W} \to \mathbb{C}$ *telle que* $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b}) = \zeta_{\mathrm{W}}(\lambda)$ *et on a*

$$\mathrm{W} \equiv \zeta_{\mathrm{W}}(\lambda) \mod \mathrm{I}(\lambda) \quad \text{sur} \quad \mathrm{F_W}.$$

Pour $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{F_W}$, E^+ *est le graphe de* $\zeta_{\mathrm{W}}|_{\mathrm{E}}$ *dans* $\mathrm{E} \times \mathbb{C}$.

Démonstration. Supposons la propriété (ii) vérifiée. Alors, d'après le 1) du lemme, on a $\mathrm{W} \in \ker \rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda) + \mathbb{C}$, et comme $\ker \rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, \lambda) \subseteq \mathrm{I}(\lambda)$ d'après le 2) des rappels 2.3.1, on a $\mathrm{W} \in \mathrm{I}(\lambda) \oplus \mathbb{C}$ avec $\mathrm{W} \equiv \widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b}) \mod \mathrm{I}(\lambda)$ en utilisant le 2) du lemme.

Soit maintenant $\mathfrak{b}'$ une seconde sous-algèbre subordonnée à λ et telle que $\rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}', \lambda)(\mathrm{W})$ soit scalaire. Alors on a

$$\mathrm{W} \equiv \widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b}) \mod \mathrm{I}(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathrm{W} \equiv \widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b}') \mod \mathrm{I}(\lambda).$$

D'où $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b}') = \widetilde{\zeta}_{\mathrm{W}}(\lambda, \mathfrak{b})$ du fait que $\mathbb{C} \cap \mathrm{I}(\lambda) = \{0\}\cdot$

Réciproquement, supposons la propriété (i) vérifiée, alors sachant que pour toute polarisation $\mathfrak{p}$ en λ, on a $\ker \rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}, \lambda) = \mathrm{I}(\lambda)$, on voit que $\rho\tilde{}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}, \lambda)(\mathrm{W})$ est scalaire. □

Nous précisons maintenant les liens entre idéaux primitifs et noyaux des représentations irréductibles lorsque G est nilpotent :

Proposition 2.3.4. *On suppose* $\mathfrak{g}$ *nilpotente. Soit* $\ell \in \mathfrak{g}^*$, *dans ce cas on a* $\ker \pi_\ell = \mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})$.

Démonstration. C'est un résultat simple et bien connu (Dixmier, [D2], introduction). Il est prouvé, nous a-t-on dit, dans la référence [D1] (Dixmier), qu'on ne peut pas se procurer facilement. Nous en donnons maintenant une nouvelle démonstration.

1) Nous utilisons la réalisation de π_ℓ, telle qu'elle a été introduite dans le paragraphe 1.2.7. Dans ce contexte, nous choisissons une polarisation (réelle) $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ, une base supplémentaire adaptée $\{\mathrm{X}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ et nous considérons que π_ℓ est la représentation associée de G dans $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^p)$.

A $\mathrm{Y} \in \mathfrak{p}$, on associe l'élément $\tilde{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} - i\ell(\mathrm{Y})$ de $\mathscr{U}(\mathfrak{p})$.

Soit $\delta \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^p)$, la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}^p$. Tout d'abord, nous notons $\mathrm{I}(\delta)$, l'idéal à gauche de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ formé par les éléments de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ qui annulent δ :

$$\mathrm{I}(\delta) = \{\mathrm{U} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \mid \pi_\ell(\mathrm{U}) \cdot \delta = 0\}\cdot$$

Il est clair que $\ker \pi_\ell$ est un idéal bilatère de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, contenu dans $\mathrm{I}(\delta)$.

Posons $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. D'après la théorie de Dixmier, le $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$-module

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, i\ell^{\mathbb{C}}) = \mathscr{U}(\mathfrak{g})/(\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathscr{A}_{\mathfrak{b}, i\ell^{\mathbb{C}}}),$$

est simple. Soit $\rho = \rho(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}, i\ell^{\mathbb{C}})$ la représentation correspondante de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dans M. Notons I(1) l'annulateur de 1_{M} dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. C'est l'idéal à gauche de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ engendré par $\{\tilde{\mathrm{Y}}\}_{\mathrm{Y}\in\mathfrak{p}}$. Il est clair que $\mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})$ est exactement le plus grand idéal bilatère de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ contenu dans I(1).

2) Dans ce qui suit, nous allons montrer l'égalité $\mathrm{I}(\delta) = \mathrm{I}(1)$. Comme $\ker \pi_\ell$ et un idéal bilatère, cela entraînera immédiatement que $\ker \pi_\ell \subseteq \mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})$ et il ne nous restera plus qu'à vérifier l'inclusion inverse pour achever la démonstration.

Pour cela, nous nous donnons une base $\{\mathrm{Y}_1 \ldots \mathrm{Y}_{n-p}\}$ de $\mathfrak{p}$, ce qui entraîne que $\{\mathrm{Y}_1 \ldots \mathrm{Y}_{n-p}, \mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p\}$, forme une base réelle de $\mathfrak{g}$ et donc une base complexe de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Utilisant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on voit facilement que

a) Les $\{\tilde{\mathrm{Y}}_{n-p}^{\alpha_{n-p}} \ldots \tilde{\mathrm{Y}}_1^{\alpha_1}\}_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-p}) \in \mathbb{N}^{n-p}}$ forment une base de $\mathscr{U}(\mathfrak{p})$.

b) La famille ci-dessous forme une base de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$:

$$\{\mathrm{X}_p^{\beta_p} \ldots \mathrm{X}_1^{\beta_1}\, \tilde{\mathrm{Y}}_{n-p}^{\alpha_{n-p}} \ldots \tilde{\mathrm{Y}}_1^{\alpha_1}\}_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-p}, \beta_1 \ldots \beta_p) \in \mathbb{N}^{n-p} \times \mathbb{N}^p = \mathbb{N}^n}$$

On déduit de a) et de b) que la famille

$$\{\mathrm{X}_p^{\beta_p} \ldots \mathrm{X}_1^{\beta_1}\, \tilde{\mathrm{Y}}_{n-p}^{\alpha_{n-p}} \ldots \tilde{\mathrm{Y}}_1^{\alpha_1}\}_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-p}, \beta_1 \ldots \beta_p) \in \mathbb{N}^n,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-p} \neq 0} \tag{2.3.1}$$

forme une base de I(1).

Par ailleurs, on a immédiatement

$$\begin{aligned} \pi_\ell(\mathrm{Y})\, \delta &= i\ell(\mathrm{Y})\delta && \text{pour} \quad \mathrm{Y} \in \mathfrak{p}, \\ \pi_\ell(\mathrm{X}_k)\, \delta &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\delta && \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant p. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\pi_\ell(\mathrm{X}_p^{\beta_p} \ldots \mathrm{X}_1^{\beta_1}\, \tilde{\mathrm{Y}}_{n-p}^{\alpha_{n-p}} \ldots \tilde{\mathrm{Y}}_1^{\alpha_1})\, \delta$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-p} \neq 0 \\ \Big(-\dfrac{\partial}{\partial x_p}\Big)^{\beta_p} \cdots \Big(-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\beta_1} \delta & \text{si} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-p} = 0 \end{cases}$$

Du fait que la famille $\left\{\Big(-\dfrac{\partial}{\partial x_p}\Big)^{\beta_p} \cdots \Big(-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\beta_1} \delta\right\}_{(\beta_1 \ldots \beta_p) \in \mathbb{N}^p}$ forme une base de l'espace vectoriel des distributions dans $\mathbb{R}^p$ de support l'origine, on déduit que la famille (2.3.1) forme une base de $\mathrm{I}(\delta)$. Ceci entraîne que $\mathrm{I}(\delta) = \mathrm{I}(1)$ et que $\ker \pi_\ell \subseteq \mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})$ comme prévu.

3) Pour prouver l'inclusion $\mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}}) \subseteq \ker \pi_\ell$, on utilise les deux faits classiques suivants :

a) L'idéal $\mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})$ étant bilatère, il est invariant sous l'action adjointe de G.

b) Le sous-espace vectoriel engendré par $\pi_\ell(\mathrm{G}) \cdot \delta$ est dense dans $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^n)$ muni de sa topologie naturelle. (On dit que δ est un *vecteur cyclique pour la représentation* π_ℓ).

On déduit en particulier du a) que $\pi_\ell(\mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})) \cdot \pi_\ell(\mathrm{G}) \cdot \delta = \{0\}\cdot$ L'action de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^p)$ pour la représentation π_ℓ étant continue, le b) entraîne que

$$\pi_\ell(\mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})) \cdot \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^p) = \{0\}$$

et que $\mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}}) \subseteq \ker \pi_\ell$. Ceci entraîne la proposition. □

Proposition 2.3.5. *On suppose* $\mathfrak{g}$ *nilpotente. Soient* $\mathrm{W} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ *et* $\ell \in \mathfrak{g}^*$. *Pour que* $\pi_\ell(\mathrm{W})$ *soit scalaire, il faut et il suffit que* $i\ell^{\mathbb{C}} \in \mathrm{F}_{\mathrm{W}}$. *Dans ce cas,* $\pi_\ell(\mathrm{W}) = \zeta_{\mathrm{W}}(i\ell^{\mathbb{C}})\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$.

Démonstration. On a $\mathrm{W} \equiv \zeta_{\mathrm{W}}(i\ell^{\mathbb{C}}) \mod \ker \pi_\ell$ en utilisant la proposition 2.3.3 et le fait que $\ker \pi_\ell = \mathrm{I}(i\ell^{\mathbb{C}})$. On a alors $\pi_\ell(\mathrm{W}) = \zeta_{\mathrm{W}}(i\ell^{\mathbb{C}})\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ d'après le 1) du lemme 2.3.2. □

2.4. **Démonstration du résultat principal.** Après avoir introduit les notions nécessaires à sa démonstration, nous nous plaçons maintenant dans les hypothèses du théorème 2.1.1. Nous définissons

$$\Gamma^{\mathbb{C}} = \{\lambda \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C},*} \mid (\lambda - if)|_{\mathfrak{h}} = 0\},$$

nous choisissons $\mathrm{W} = \sigma$, $\mathrm{E} = \Gamma^{\mathbb{C}}$ et nous posons $\widetilde{\mathrm{F}} = \widetilde{\mathrm{F}}_\sigma$, $\mathrm{F} = \mathrm{F}_\sigma$, $\zeta = \zeta_\sigma$ et $\widetilde{\zeta} = \widetilde{\zeta}_\sigma$.

Il suffit de constater que le (i) du théorème entraîne les autres propriétés. Nous le supposons donc vérifié et nous prouvons les résultats suivants :

Lemme 2.4.1. *On a* $\Gamma^{\mathbb{C}} \subseteq \mathrm{F}$.

Démonstration. A priori, $\mathrm{F} \cap \Gamma^{\mathbb{C}}$ est un fermé de Zariski de $\Gamma^{\mathbb{C}}$. Il est donc formé par les zéros communs d'un idéal de fonctions polynomiales sur $\Gamma^{\mathbb{C}}$.

Il nous suffit donc de vérifier que tout élément P de cet idéal s'annule sur $\Gamma^{\mathbb{C}}$ tout entier.

Les hypothèses et le lemme 2.3.5 entraînent que

$$\ell \in \mathscr{M} \;\Rightarrow\; i\ell^{\mathbb{C}} \in \mathrm{F} \cap \Gamma^{\mathbb{C}} \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(i\ell^{\mathbb{C}}) = 0.$$

Par continuité, on en déduit que $\mathrm{P}(i\ell^{\mathbb{C}}) = 0$ pour tout ℓ dans l'adhérence de $\mathscr{M}$ et, comme $\overline{\mathscr{M}}$ est d'intérieur non vide, pour tout ℓ d'un ouvert de $i\Gamma$ pour la topologie ordinaire. Cela entraîne que les dérivées de P à tous les ordres, sont nulles en un point de $i\Gamma$. On a donc, comme prévu, $\mathrm{P}(\Gamma^{\mathbb{C}}) = \{0\}\cdot$ □

Notre but, désormais, est de prouver que $\zeta|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}$ est une fonction polynomiale sur $\Gamma^{\mathbb{C}}$. Utilisant le 1) et le 3) de la proposition 2.2.2, dans lequel on remplace E par le fermé irréductible $\Gamma^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C},*}$, on obtient le

Lemme 2.4.2. *Le graphe* $\Gamma^{\mathbb{C},+}$ *de* $\zeta|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}$ *est un fermé de Zariski irréductible de* $\Gamma^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$.

Le fait que $\zeta|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}$ est polynomiale résulte alors du lemme suivant :

Lemme 2.4.3. *Soit α une fonction de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$ dont le graphe* Y *dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$ est un fermé connexe de Zariski. Alors α est une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}^p$.*

Remarque 2.4.4. L'hypothèse de connexité est nécessaire comme cela apparaît dans l'exemple suivant : supposons $p = 1$ et considérons le fermé de Zariski dans $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}$

$$\mathrm{F} = \{(z_1, z) \mid z_1\,(z_1 z - 1) = 0 \quad \text{et} \quad z\,(z_1 z - 1) = 0\}$$

qui n'est pas connexe. C'est le graphe de la fonction α de $\mathbb{C}^1$ dans $\mathbb{C}$ donnée par

$$\alpha(z_1) = \frac{1}{z_1} \quad \text{pour} \quad z_1 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha(0) = 0.$$

Elle n'est pas polynomiale.

Démonstration. Pour simplifier, l'anneau des polynômes

$$\mathbb{C}[\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p, \mathrm{X}] \qquad (\text{resp. } \mathbb{C}[\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p])$$

sera noté $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}_0$) dans cette démonstration. Nous désignerons par

$$\mathrm{Z} = (z_1 \ldots z_p,\, z) \qquad (\text{ resp.} \quad \mathrm{Z}_0 = (z_1 \ldots z_p) \text{ }),$$

un élément courant de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}^p$). Si $\mathrm{P} \in \mathscr{A}$, $\mathrm{d}^\circ_{\mathrm{X}}\,\mathrm{P}$ désigne le degré de P en la $(p+1)^{\text{ième}}$ variable X.

Pour $\mathrm{P} \in \mathscr{A}$ (ou $\mathrm{P} \in \mathscr{A}_0$), $\mathscr{Z}(\mathrm{P})$ désigne la variété des zéros de P dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$. Pour $\mathrm{P} \in \mathscr{A}_0$, $\mathscr{Z}_0(\mathrm{P})$ désigne la variété des zéros de P dans $\mathbb{C}^p$.

Soit $\mathbb{C}(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p)$ le corps des fractions rationnelles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p]$. Nous notons $\mathscr{P}$ l'anneau $\mathbb{C}(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p)\,[\mathrm{X}]$ des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{C}(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_p)$.

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal radical de $\mathscr{A}$ formé par les polynômes qui s'annulent sur Y. Nous nous proposons de montrer que tous les éléments de $\mathscr{I}$ sont des multiples d'un certain polynôme N_1 de $\mathscr{A}$.

Soit $\mathscr{I}'$ l'idéal engendré par $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{P} \supseteq \mathscr{A}$. On voit que $\mathrm{Q} \in \mathscr{I}'$ si et seulement si on peut écrire Q sous la forme $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{P} \in \mathscr{I}$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_0$, P et A étant premiers entre eux.

Le fait que Y est un graphe entraîne facilement que si $\mathrm{P} \in \mathscr{I} \setminus \{0\}$ alors $\mathrm{d}^\circ_{\mathrm{X}}\,\mathrm{P} \geqslant 1$.

L'anneau $\mathscr{P}$ étant principal, tous les éléments de $\mathscr{I}'$ sont multiples d'un certain élément de cet idéal. Cet élément peut, a priori, s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{AN}_1}{\mathrm{B}}$ où $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{A}_0$ et $\mathrm{N}_1 \in \mathscr{A}$ avec $\mathrm{d}^\circ_{\mathrm{X}}\,\mathrm{N}_1 > 0$. On peut choisir N_1 non factorisable par un élément de $\mathscr{A}_0$, et A et B premiers entre eux.

A priori, on peut écrire

$$\mathrm{N}_1 = a^1_q \mathrm{X}^q + \cdots + a^1_0 \quad \text{avec} \quad q > 0,\ \ a^1_q \in \mathscr{A}^*_0 \quad \text{et} \quad a^1_{q-1} \ldots a^1_0 \in \mathscr{A}_0.$$

En particulier, tout élément P de $\mathscr{I}$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{C}} \cdot \dfrac{\mathrm{AN}_1}{\mathrm{B}}$ où P_1 et C sont respectivement des éléments de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{A}_0$.

Le lemme de Gauss entraîne que B divise P_1 et C divise A, puisque les anneaux $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_0$ sont factoriels. Finalement, tous les éléments de $\mathscr{I}$ sont des multiples de N_1 : $\forall P \in \mathscr{I},\ \exists Q \in \mathscr{A}$ tel que $P = QN_1$.

On a donc $\mathscr{Z}(N_1) \subseteq Y$. Ceci entraîne que pour tout $Z_0 \in \mathbb{C}^p$, la fonction

$$z \to a_q^1(Z_0)\, z^q + \cdots + a_0^1(Z_0) \text{ sur } \mathbb{C}$$

admet au plus un zéro. De plus, pour $Z_0 \notin \mathscr{Z}_0(a_q^1)$, elle admet exactement un zéro qui, par dérivation d'ordre $q-1$, est aussi un zéro de la fonction

$$z \to q\, a_q^1(Z_0)\, z + a_{q-1}^1(Z_0).$$

Posons $N_0 = q\, a_q^1 X + a_{q-1}^1$ et, utilisant le fait que $\mathscr{A}$ est factoriel, écrivons N_0 sous la forme $N_0 = bN$ où $b \in \mathscr{A}_0$, $N = a_1 X + a_0 \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}_0$ et N est irréductible. On voit que $\mathscr{Z}(N) \setminus \mathscr{Z}(a_q^1) \subseteq Y$ en utilisant le fait que $\mathscr{Z}(b) \subseteq \mathscr{Z}(a_q^1)$. De plus, a_q^1 n'est pas divisible par N. Le Nullstellensatz de Hilbert entraîne donc que tous les éléments de $\mathscr{I}$ sont des multiples du polynôme N du premier degré en X. Mais ceci ne prouve pas encore que $N \in \mathscr{I}$, affirmation qui est d'ailleurs fausse en général, lorsque Y n'est pas connexe (voir la remarque 2.4.4), hypothèse que nous n'avons pas encore utilisée.

Montrons par l'absurde qu'on a nécessairement $\mathscr{Z}_0(a_1) \cap \mathscr{Z}_0(a_0) = \emptyset$. Supposons donc qu'il existe un élément $Z_0^* \in \mathscr{Z}_0(a_1) \cap \mathscr{Z}_0(a_0)$. Dans ce cas les éléments de $(Z_0^*, \mathbb{C})$ sont des zéros de N et par conséquent, de tous les éléments de $\mathscr{I}$. On obtient bien une contradiction avec le fait que Y est un graphe.

On en déduit qu'on a nécessairement $\mathscr{Z}(N) \subseteq (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}) \setminus \mathscr{Z}(a_1)$. Comme $\mathscr{Z}(N) \subseteq Y$, on a $\mathscr{Z}(N) = Y \setminus [Y \cap \mathscr{Z}(a_1)]$. Du fait que $Y = [Y \cap \mathscr{Z}(a_1)] \cup (Y \setminus [Y \cap \mathscr{Z}(a_1)])$, on a

$$\mathscr{Z}(N) \cup [Y \cap \mathscr{Z}(a_1)] = Y, \qquad \mathscr{Z}(N) \cap [Y \cap \mathscr{Z}(a_1)] = \emptyset. \tag{2.4.1}$$

Ce résultat est valable lorsque le graphe Y est un fermé de Zariski quelconque. Nous utilisons maintenant le fait que Y est *connexe* pour démontrer par l'absurde, que l'élément $a_1 de \mathscr{A}^*$ appartient en fait à $\mathbb{C}^*$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\mathscr{Z}(a_1) \neq \emptyset$ et par conséquent $Y \cap \mathscr{Z}(a_1) \neq \emptyset$. Comme $\mathscr{Z}(N) \neq \emptyset$, les égalités (2.4.1) entraîneraient alors que Y est l'union disjointe de deux fermés et une contradiction.

En conclusion $\mathscr{I}$ est formé par l'ensemble des multiples d'un polynôme N de la forme $X - a_0$ avec $a_0 \in \mathscr{A}_0$. D'où le lemme. □

Comme on a $\theta(\ell) = \zeta(i\ell^{\mathbb{C}})$ sur Γ, on en déduit aussitôt que θ est polynomiale. Ceci achève la démonstration du théorème 2.1.1.

3. Rappels et notions nécessaires pour l'énoncé des résultats

3.1. **Généralités.** Dans cette sous-section, nous introduisons des notations et des concepts utiles pour la présentation de nos résultats dans la sous-section 4.1. D'autres notions générales, utiles seulement pour la démonstration de notre résultat principal : le théorème 4.1.2, seront introduites dans la sous-section 6.1.

3.1.1. Dans la suite, K désignera un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et de dimension d. Dans nos applications, K sera toujours un sous-groupe de Lie de G mais ce fait sera souvent secondaire. Nous considérerons un espace vectoriel réel V de dimension finie m, dont l'élément courant sera le plus souvent noté ℓ ainsi qu'une représentation linéaire $g, \ell \to g \cdot \ell$ de K dans V qui induira une représentation $\mathrm{X}, \ell \to \mathrm{X} \cdot \ell$ de $\mathfrak{k}$ dans V. Dans toutes nos applications, V sera le dual d'un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.

On notera $\mathrm{K}(\ell) = \{g \in \mathrm{K} \mid g \cdot \ell = \ell\}$ et $\mathfrak{k}(\ell) = \{\mathrm{X} \in \mathfrak{k} \mid \mathrm{X} \cdot \ell = 0\}$. Rappelons (voir [C-G1], lemma 3.1.1), qu'on a $\mathrm{K}(\ell) = \exp \mathfrak{k}(\ell)$.

La lettre P désignera un sous-espace affine de V.

On désignera par $\mathscr{E} = \{\mathfrak{k}_j\}_{j \in \mathscr{J}}$ un drapeau d'idéaux de $\mathfrak{k}$

$$\{0\} = \mathfrak{k}_{j_0} \subset \mathfrak{k}_{j_1} \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{j_d}.$$

et on posera $\mathrm{K}_j = \exp \mathfrak{k}_j$. Il apparaîtra que, pour de ne pas alourdir les notations par un usage excessif des multi-indices, $\mathscr{J} = \{j_0 = 0, j_1, \ldots, j_d\}$ devra, en général, être choisi comme une suite croissante finie d'entiers *non nécessairement successifs.* De plus, il sera commode, pour $j_{s-1} \leqslant i < j_s$, de poser $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k}_{j_{s-1}}$.

3.1.2. Supposons que $\mathfrak{k}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Alors on peut associer un drapeau d'idéaux d_{K} de $\mathfrak{k}$ au drapeau d de $\mathfrak{g}$. Pour $0 \leqslant j \leqslant n$, on pose $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_j$. Désignons par $\mathscr{I}(\mathrm{K}, d)$ le sous-ensemble de $[0 \ldots n]$ formé par les indices tels que soit $j = 0$, soit $\mathfrak{k}_j \supsetneq \mathfrak{k}_{j-1}$, ou de façon équivalente tels que soit $j = 0$, soit $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{k}_j$. On voit donc qu'on peut associer au drapeau d'idéaux d de $\mathfrak{g}$, le drapeau d'idéaux $d_{\mathrm{K}} = \{\mathfrak{k}_{\mathrm{j}}\}_{j \in \mathscr{I}(\mathrm{K},d)}$ de $\mathfrak{k}$ indexé par $\mathscr{I}(\mathrm{K}, d)$. Pour simplifier, nous poserons $\mathscr{I} = \mathscr{I}(\mathrm{H}, d)$. On a donc $d_{\mathrm{H}} = \{\mathfrak{h}_{\mathrm{j}}\}_{j \in \mathscr{I}}$.

3.1.3. Supposons que $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{k}$ soient des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et $\ell' = \ell|_{\mathfrak{g}'} \in \mathfrak{g}'^*$. Alors, avec les notations de 3.1.1 et de 1.2.1, on a $\mathfrak{k}(\ell') = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell}$.

3.1.4. Nous dirons qu'une propriété est vérifiée *génériquement sur* P, ou *pour ℓ générique dans* P, si elle est vérifiée pour tous les ℓ d'un ouvert de Zariski de P.

3.1.5. Dans la suite, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on notera $\mathrm{p}_j : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_j^*$, l'application restriction telle que $\mathrm{p}_j(\ell) = \ell|_{\mathfrak{g}_j}$. Nous utiliserons plusieurs fois le fait que p_j est une surjection Zariski-ouverte et qu'elle commute avec l'action de G sur $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}_j^*$.

Lorsque $\mathfrak{l}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}_j$ et que $\ell \in \mathfrak{l}^*$, on notera parfois $\ell_j = \ell|\mathfrak{g}_j$. Le plus souvent, cette convention sera utilisée lorsque $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$, on aura alors $\ell_j = \mathrm{p}_j(\ell)$.

3.2. **Les ensembles** $\mathrm{S}\big(e(\mathrm{P}, \mathrm{V}; \mathrm{K}, \mathscr{E})\big)$ **et** $\mathrm{T}\big(e(\mathrm{P}, \mathrm{V}; \mathrm{K}, \mathscr{E})\big)$**.** Soient les objets $(\mathrm{P}, \mathrm{V}; \mathrm{K}, \mathscr{E})$, comme dans le paragraphe 3.1.1 et $\ell \in \mathrm{V}$. Dans cette section, nous ne considérerons que des situations dans lesquelles on a $\mathrm{V} = \mathfrak{g}^*$ et $\mathrm{P} = \Gamma$. Considérons les orbites $\mathrm{K}_{j-1} \cdot \ell$ et $\mathrm{K}_j \cdot \ell$ dans V. On vérifie facilement la

Proposition 3.2.1. *On a les deux situations possibles ci-dessous qui s'excluent mutuellement :*

$$\begin{array}{lrl}
1) & \mathfrak{k}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{k}_{j-1} & \Longleftrightarrow \ \mathfrak{k}_j(\ell) = \mathfrak{k}_{j-1}(\ell) \\
 & & \Longleftrightarrow \ \dim \mathrm{K}_j \cdot \ell = \dim \mathrm{K}_{j-1} \cdot \ell + 1 \\
 & & \Longleftrightarrow \ \dim \mathrm{K}_j \cdot \ell \neq \dim \mathrm{K}_{j-1} \cdot \ell \\[1em]
2) & \mathfrak{k}_j = \mathfrak{k}_{j-1} + \mathfrak{k}_j(\ell) & \Longleftrightarrow \ \mathfrak{k}_j(\ell) \supsetneq \mathfrak{k}_{j-1}(\ell) \\
 & & \Longleftrightarrow \ \dim \mathrm{K}_j \cdot \ell = \dim \mathrm{K}_{j-1} \cdot \ell.
\end{array}$$

Les équivalences concernant les dimensions des orbites ne sont données qu'à titre d'informations : seules les premières équivalences du 1) et du 2) sont indispensables pour la suite.

Dans cette sous-section, on désigne par $\{\ell_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ une base de V, par $\{\varepsilon_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ la base duale de V^* et enfin par $\{\mathrm{Y}_j\}_{j \in \mathscr{J}} = \{\mathrm{Y}_{i_s}\}_{1 \leqslant s \leqslant d}$ une base de $\mathfrak{k}$, telle que $\mathrm{Y}_j \in \mathfrak{k}_j \setminus \mathfrak{k}_{j-1}$, de telle sorte que pour $k \in \mathbb{N}$, $\{\mathrm{Y}_j\}_{j \in \mathscr{J} \cap [1 \ldots k]}$ forme une base de $\mathfrak{k}_k$.

Fixons-nous provisoirement $\ell \in \mathrm{V}$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $\mathrm{M}_j(\ell)$ comme suit :

a) $\mathrm{M}_0(\ell) = (0)$.

b) Pour $k = i_s \in \mathscr{J} \setminus \{0\}$ (avec $s > 0$), on pose

$$\mathrm{M}_k(\ell) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\mathrm{Y}_{i_1} \cdot \ell) & \ldots & \varepsilon_1(\mathrm{Y}_{i_s} \cdot \ell) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_m(\mathrm{Y}_{i_1} \cdot \ell) & \ldots & \varepsilon_m(\mathrm{Y}_{i_s} \cdot \ell) \end{pmatrix}.$$

c) Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{M}_j(\ell) = \mathrm{M}_k(\ell)$ où k est le plus grand élément de $\mathscr{J}$ tel que $k \leqslant j$.

On voit que le nombre de colonnes de $\mathrm{M}_j(\ell)$ est égal à $\dim \mathfrak{k}_j$ et que

$$\dim \ker \mathrm{M}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_j(\ell), \qquad \operatorname{rang} \mathrm{M}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_j - \dim \mathfrak{k}_j(\ell).$$

On définit alors l'entier

$$n_j = \max_{\ell \in \mathrm{P}} \operatorname{rang} \mathrm{M}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_j - \min_{\ell \in \mathrm{P}} \dim \mathfrak{k}_j(\ell).$$

Il ne dépend évidemment pas du choix des $\{Y_j\}_{j\in\mathscr{J}}$. Définissons

$$\mathscr{O}(P, V; K, \mathscr{E}) = \{\ell \in P \mid \dim \mathfrak{k}_j - \dim \mathfrak{k}_j(\ell) = n_j, \quad \forall j \in \mathscr{J}\}\cdot$$

On voit que c'est un ouvert de Zariski de P. On a la

Proposition 3.2.2. *Soit* $j \in \mathscr{J} \setminus \{0\}$, *alors une et une seule des deux situations ci-dessous est vérifiée pour tout* $\ell \in \mathscr{O} = \mathscr{O}(P, V; K, \mathscr{E})$:

1) *On a* $\mathfrak{k}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{k}_{j-1}$.
2) *On a* $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{k}_{j-1} + \mathfrak{k}_j(\ell)$.

Démonstration. On a $n_j - n_{j-1} = 1 - \dim \mathfrak{k}_j(\ell) + \dim \mathfrak{k}_{j-1}(\ell)$ pour $\ell \in \mathscr{O}$, et les deux possibilités suivantes :

1) $n_j = n_{j-1} + 1$, $\dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{j-1}(\ell)$. On est alors dans la première situation de l'énoncé.

2) $n_j = n_{j-1}$, $\dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{j-1}(\ell) + 1$. On est alors dans la deuxième situation. □

On définit les sous-ensembles $S(e(P, V; K, \mathscr{E}))$ et $T(e(P, V; K, \mathscr{E}))$ de $\mathscr{J} \setminus \{0\}$ par

$$\begin{aligned} S(e(P, V; K, \mathscr{E})) &= \{j \in \mathscr{J} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{k}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{k}_{j-1} \\ &\qquad\qquad \text{pour } \ell \text{ générique sur } P\} \\ T(e(P, V; K, \mathscr{E})) &= \{j \in \mathscr{J} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{k}_j = \mathfrak{k}_{j-1} + \mathfrak{k}_j(\ell) \\ &\qquad\qquad \text{pour } \ell \text{ générique sur } P\}, \end{aligned}$$

de telle sorte que $\mathscr{J} = \{0\} \cup T(e(P, V; K, \mathscr{E})) \cup S(e(P, V; K, \mathscr{E}))$, (union disjointe).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} S_k(e(P, V; K, \mathscr{E})) &= S(e(P, V; K, \mathscr{E})) \cap [0 \ldots k] \qquad \text{et} \\ T_k(e(P, V; K, \mathscr{E})) &= T(e(P, V; K, \mathscr{E})) \cap [0 \ldots k]. \end{aligned}$$

On a $S_0(e(P, V; K, \mathscr{E})) = \emptyset$ et $T_0(e(P, V; K, \mathscr{E})) = \emptyset$. Par récurrence sur k, on voit facilement qu'on a

$$\begin{aligned} \operatorname{card} S_k(e(P, V; K, \mathscr{E})) &= \max_{\ell \in P} \operatorname{rang} M_k(\ell) = \dim \mathfrak{k}_k - \min_{\ell \in P} \dim \mathfrak{k}_k(\ell), \\ &= \dim \mathfrak{k}_k - \dim \mathfrak{k}_k(\ell) \text{ pour } \ell \text{ générique dans } P, \\ \operatorname{card} T_k(e(P, V; K, \mathscr{E})) &= \quad \dim \mathfrak{k}_k(\ell) \qquad \text{pour } \ell \text{ générique dans } P. \end{aligned}$$

Bien que ce ne soit pas utilisé par la suite, nous motivons maintenant le choix de la notation $e(P, V; K, \mathscr{E})$. Elle désigne la fonction croissante

$$e(P, V; K, \mathscr{E}) : \mathscr{J} \to [0 \ldots \dim \mathfrak{k} - 1],$$

donnée par $e(P, V; K, \mathscr{E})(j) = \dim \mathfrak{k}_j - \min_{\ell \in P} \dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \max_{\ell \in P} \dim K_j \cdot \ell$.

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(e(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K},\mathscr{E})) &= \{j\in\mathscr{J}\setminus\{0\} \mid e(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K},\mathscr{E})(j)\\ &\qquad = e(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K},\mathscr{E})(j-1)+1\},\\ \mathrm{T}(e(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K},\mathscr{E})) &= \{j\in\mathscr{J}\setminus\{0\} \mid e(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K},\mathscr{E})(j)\\ &\qquad = e(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K},\mathscr{E})(j-1)\}.\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on posera pour simplifier

$$\begin{array}{rclcrcl} e_{\mathrm{H}} &=& e(\Gamma,\mathfrak{g}^*;\mathrm{H},d_{\mathrm{H}}), && e &=& e(\Gamma,\mathfrak{g}^*;\mathrm{G},d),\\ \mathrm{S}(e_{\mathrm{H}}) &=& \mathrm{S}(e(\Gamma,\mathfrak{g}^*;\mathrm{H},d_{\mathrm{H}})), && \mathrm{S}(e) &=& \mathrm{S}(e(\Gamma,\mathfrak{g}^*;\mathrm{G},d)),\\ \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}}) &=& \mathrm{T}(e(\Gamma,\mathfrak{g}^*;\mathrm{H},d_{\mathrm{H}})), && \mathrm{T}(e) &=& \mathrm{T}(e(\Gamma,\mathfrak{g}^*;\mathrm{G},d)).\end{array}$$

3.3. **Les ensembles d'indices** $\mathrm{S}(e)$**,** $\mathrm{T}(e)$**,** $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$ **et** $\mathrm{U}(e)$**.** Dans la sous-section précédente, plaçons-nous dans l'hypothèse où $\mathrm{P}=\Gamma$, $\mathrm{V}=\mathfrak{g}^*$, $\mathrm{K}=\mathrm{G}$ et $\mathscr{E}=d$. On a donc $\mathscr{J}=[0\ldots n]$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(e) &= \{j\in[1\ldots n] \mid \mathfrak{g}_j(\ell)\subseteq\mathfrak{g}_{j-1} \text{ génériquement sur } \Gamma\},\\ \mathrm{T}(e) &= \{j\in[1\ldots n] \mid \mathfrak{g}_j=\mathfrak{g}_{j-1}+\mathfrak{g}_j(\ell) \text{ génériquement sur } \Gamma\}.\end{aligned}$$

avec $\mathrm{S}_k(e)=\mathrm{S}(e)\cap[0\ldots k]$, $\mathrm{T}_k(e)=\mathrm{T}(e)\cap[0\ldots k]$ pour $0\leqslant k\leqslant n$. En particulier $\mathrm{T}_0(e)=\mathrm{S}_0(e)=\emptyset$, $\mathrm{S}_n(e)=\mathrm{S}(e)$ et $\mathrm{T}_n(e)=\mathrm{T}(e)$. De plus,

$$\operatorname{card}\mathrm{T}_j(e)=\dim\mathfrak{g}_j(\ell)\quad\text{pour } \ell \text{ générique dans } \Gamma.$$

La fonction croissante $e:[1\ldots n]\to[0\ldots n-1]$ est donnée par

$$e(j)=\dim\mathfrak{g}_j-\min_{\ell\in\Gamma}\dim\mathfrak{g}_j(\ell)=\max_{\ell\in\Gamma}\dim\mathrm{G}_j\cdot\ell,$$

de telle sorte que $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{S}(e)=\{j\in[1\ldots n]\mid e(j)=e(j-1)+1\},\\ \mathrm{T}(e)=\{j\in[1\ldots n]\mid e(j)=e(j-1)\}.\end{array}\right.$

La remarque suivante va nous permettre de donner une définition équivalente pour e et d'établir un lien avec des approches plus classiques, (voir [C-G2], § 1 ainsi que la section 3.1 de [C-G1]). Nous n'utiliserons pas ce résultat par la suite.

Proposition 3.3.1. *Soient* $\ell\in\mathfrak{g}^*$, $j\in[0\ldots n]$, $\ell_j=\mathrm{p}_j(\ell)\in\mathfrak{g}_j^*$. *On a* $\dim\mathrm{G}_j\cdot\ell=\dim\mathrm{G}\cdot\mathrm{p}_j(\ell)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{G}_j\cdot\ell &= \dim(\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_j(\ell))\\ \dim\mathrm{G}\cdot\ell_j &= \dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_j^{\mathrm{B}_\ell} = \dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)-\dim\mathfrak{g}_j^{\mathrm{B}_\ell}/\mathfrak{g}(\ell)\\ &= \dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)-[\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)-\dim\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_j(\ell)]\\ &= \dim\mathrm{G}_j\cdot\ell\end{aligned}$$

□

On a donc $e(j)=\max_{\ell\in\Gamma}\dim\mathrm{G}\cdot\ell_j$ (autre définition plus classique).

Proposition 3.3.2. *On a* $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})\subseteq\mathrm{T}(e)$.

Démonstration. Soient $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathfrak{g}, d) \cap \mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathfrak{h}, d_{\mathrm{H}})$ et $j \in \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$. Comme $j \in \mathscr{I}$, on a $\mathfrak{h}_j \not\subset \mathfrak{g}_{j-1}$. Pour tout ℓ de $\mathscr{O}$, on a de plus, $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_{j-1} + \mathfrak{h}_j(\ell)$. Il existe alors un élément $\mathrm{Y}_\ell \in \mathfrak{h}_j(\ell) \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$ et comme $\mathfrak{h}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{g}_j(\ell)$, on a $\mathrm{Y}_\ell \in \mathfrak{g}_j(\ell) \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$. D'où $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_j(\ell)$. Donc $j \in \mathrm{T}(e)$. □

Dans la suite, on posera $\mathrm{U}(e) = \mathrm{T}(e) \setminus \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$ et pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{U}_k(e) = \mathrm{U}(e) \cap [0 \dots k]$, de telle sorte que $\mathrm{U}_0(e) = \emptyset$ et $\mathrm{U}_n(e) = \mathrm{U}(e)$. On voit que

$$\operatorname{card} \mathrm{U}_k(e) = \dim \mathfrak{g}_k(\ell) - \dim \mathfrak{h}_k(\ell), \tag{3.3.1}$$

génériquement pour ℓ dans Γ.

D'autres résultats concernant ces questions, utiles pour les démonstrations par récurrence, seront donnés dans la sous-section 6.4.

3.4. Éléments Γ-centraux de Corwin-Greenleaf.

On se donne le drapeau d'idéaux $d = \{\mathfrak{g}_j\}_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $\mathfrak{g}$.

Définition 3.4.1. Soit $j \in \mathrm{T}(e)$. On dit que l'élément Γ-central $\sigma_j \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_j)$ est de Corwin-Greenleaf d'ordre j, lorsqu'on peut écrire $\sigma_j = \xi_j \mathrm{X}_j + \eta_j$ de telle sorte que

1) ξ_j est un élément Γ-central de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ tel que $\ell \to \pi_\ell(\xi_j)$ est non identiquement nul sur Γ.

2) $\mathrm{X}_j \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$.

3) $\eta_j \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$.

Remarque 3.4.2. 1) Le choix de $\mathrm{X}_j \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$ est sans importance.

2) Dans la suite, nous conviendrons d'appeler *fonction de Corwin-Greenleaf d'ordre* j, la fonction θ_j de Z_j telle que

$$\pi_\ell(\sigma_j) = \theta_j(\ell) \ \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty} .$$

3) Les présents résultats seront complétés plus loin, dans la sous-section 6.3. Nous y verrons (formule (6.3.1)), qu'il existe des fonctions Φ_j et φ_j sur $\mathrm{G} \cdot \Gamma_{j-1}$, ($\Phi_j$ est de plus G-invariante), dont la restriction à Γ_{j-1} est polynomiale et telles que pour tout ℓ de $\mathrm{G} \cdot \Gamma$

$$\theta_j(\ell) = \Phi_j(\ell_{j-1}) \cdot \ell(\mathrm{X}_j) + \varphi_j(\ell_{j-1}) \quad \text{avec} \quad \ell_{j-1} = \mathrm{p}_{j-1}(\ell).$$

4) Corwin et Greenleaf ont montré dans [C-G3], theorem 3.1, l'existence pour tout j de $\mathrm{T}(e)$ d'éléments de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_j)$ possédant les propriétés ci-dessus. Les éléments qu'ils introduisent possèdent d'autres propriétés que nous n'utiliserons pas : en particulier, les ξ_j qu'ils considèrent sont des fonctions polynomiales des $\{\theta_j\}_{j \in \mathrm{T}_{j-1}(e)}$. Leur définition est donc plus restrictive que la notre.

Nous appellerons *suite de Corwin-Greenleaf* (resp. *suite partielle de Corwin-Greenleaf d'ordre* k), relativement au drapeau d, une suite $\{\sigma_j\}_{j \in \mathrm{T}(e)}$ indicée par $\mathrm{T}(e)$, (resp. $\{\sigma_j\}_{j \in \mathrm{T}_k(e)}$ indicée par $\mathrm{T}_k(e)$), d'éléments de Corwin-Greenleaf d'ordre j. On associera à une telle suite, la *suite de fonctions de Corwin-Greenleaf* $\{\theta_j \in \mathrm{Z}_j\}_{j \in \mathrm{T}(e)}$, (resp. la *suite partielle d'ordre* k *de fonctions de Corwin-Greenleaf* $\{\theta_j \in \mathrm{Z}_j\}_{j \in \mathrm{T}_k(e)}$).

4. Énoncés des résultats principaux. Exemples

4.1. **Résultats principaux.** Soient $d = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n$ un drapeau d'idéaux quelconque de $\mathfrak{g}$ et $\Theta_{\mathrm{R}} = \{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)}$ une suite de fonctions de Corwin-Greenleaf relative à ce drapeau.

Théorème 4.1.1. *Soit k, $0 \leqslant k \leqslant n$,*

1) *Alors $\Theta_{\mathrm{R},k} = \{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)}$ forme un système de générateurs rationnels de Z_k. En particulier, Θ_{R} forme un système de générateurs rationnels de Z.*

2) *Si $k \in \mathrm{S}(e)$, alors on a $\mathrm{Z}_k = \mathrm{Z}_{k-1}$.*

Théorème 4.1.2. *Soit k, $0 \leqslant k \leqslant n$,*

1) *Alors $\Theta_k = \{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ forme une base de transcendance de Z_k. En particulier $\Theta = \{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ forme une base de transcendance de Z.*

2) *Pour ℓ générique dans Γ, on a $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}_k = \dim \mathfrak{g}_k(\ell)/\mathfrak{h}_k(\ell)$ et en particulier $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z} = \dim \mathfrak{g}(\ell)/\mathfrak{h}(\ell)$.*

Remarque 4.1.3. a) Reformulons en détail le 1) du théorème 4.1.1 :

On a un sous-ensemble $\mathrm{T}(e)$ de $[1 \ldots n]$ formé par les indices j qui vérifient la propriété suivante :

$$\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_j(\ell) \quad \text{pour } \ell \text{ générique dans } \Gamma.$$

Ces indices sont associés aux éléments Γ-centraux $\{\sigma_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)}$ d'une suite de Corwin-Greenleaf et aux fonctions correspondantes de Corwin-Greenleaf $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)}$ dans Z.

Alors toute fonction θ de Z, peut s'écrire sous la forme

$$\theta = \frac{\mathrm{P}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)})}{\mathrm{Q}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)})},$$

où P et Q sont des fonctions polynomiales des θ_j $(j \in \mathrm{T}(e))$.

Plus précisément, pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant n$, toute fonction θ de Z_k peut s'écrire sous la forme $\theta = \dfrac{\mathrm{P}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)})}{\mathrm{Q}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)})}$ où P et Q sont des fonctions polynomiales des θ_j $(j \in \mathrm{T}_k(e))$. Nous verrons plus loin (formule 5.3 à la fin de la section 5), qu'en fait, on peut choisir Q fonction polynomiale des seuls θ_j $(j \in \mathrm{T}_{k-1}(e))$.

b) Reformulons le 1) du théorème 4.1.2 :

On a un sous-ensemble $\mathrm{U}(e)$ de $[1 \ldots n]$ formé par les indices j qui vérifient la propriété suivante :

$$\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_j(\ell) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{h}_{j-1} \quad \text{pour } \ell \text{ générique dans } \Gamma.$$

Ces indices sont associées aux fonctions $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$, comme précédemment. On a alors les propriétés suivantes :

α) Le système $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ est algébriquement libre sur $\mathbb{C}$ dans Z : on a $\mathrm{P}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}) \neq 0$, pour tout polynôme non nul P de $\mathbb{C}[\{\mathrm{X}_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}]$.

β) Le système $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ est algébriquement générateur sur $\mathbb{C}$ dans Z : pour toute fonction θ de Z, il existe des polynômes $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ des variables $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ tels que

(4.1.1) $$\mathrm{P}_0 + \cdots + \mathrm{P}_m\,\theta^m = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}_m(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}) \neq 0.$$

Plus précisément, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les P_0, $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ sont des polynômes des seules variables $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ pour toute fonction θ de Z_k.

c) Le 2) du théorème 4.1.2 est une conséquence immédiate du 1) qui nous dit que $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Z}_k = \operatorname{card} \mathrm{U}_k(e)$ et de la formule (3.3.1).

4.2. **Exemples.**

4.2.1. Notre premier exemple est trivial, mais cependant instructif. Supposons que $\mathfrak{g} = \{\mathrm{X}_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit commutative et que $\mathfrak{h} = \{\mathrm{X}_k\}_{1\leqslant k\leqslant p}$. On a alors $\Gamma \simeq \mathbb{R}^{n-p}$ et tous les éléments de de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ sont Γ-centraux. On a $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}}) = [1\ldots p]$, $\mathrm{T}(e) = [1\ldots n]$ et $\mathrm{U}(e) = [p+1\ldots n]$. On voit que les $\{\mathrm{X}_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ forment une suite de Corwin-Greenleaf d'éléments (Γ-)centraux de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Soit $\theta_k : \ell \to \ell(\mathrm{X}_k)$, les fonctions de Corwin-Greenleaf associées. Pour $p < k \leqslant n$, on a $\mathrm{Z}_k = \mathbb{C}[\theta_{p+1}\ldots\theta_k]$.

4.2.2. Considérons maintenant l'algèbre de Lie nilpotente
$$\mathfrak{g} = \{\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Y}_4, \mathrm{X}\}\cdot$$
avec pour crochets non nuls $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}_{k+1}] = \mathrm{Y}_k$, $(1 \leqslant k \leqslant 3)$. Soient $a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, $f = a_3\mathrm{Y}_3^* + a_4\mathrm{Y}_4^*$ et $\mathfrak{h} = \{\mathrm{Y}_3, \mathrm{Y}_4\}\cdot$ Comme $\mathfrak{h}$ est commutative, elle est subordonnée à f et on est bien dans la situation de la sous-section 1.1 avec
$$\Gamma = \{\ell = \ell_1\mathrm{Y}_1^* + \ell_2\mathrm{Y}_2^* + a_3\mathrm{Y}_3^* + a_4\mathrm{Y}_4^* + \ell_5\mathrm{X}^* \mid (\ell_1,\ell_2,\ell_5) \in \mathbb{R}^3\} \simeq \mathbb{R}^3.$$

On pose $\mathfrak{b} = \bigoplus_{j=1}^{4} \mathbb{R}\mathrm{Y}_j$, on a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\mathrm{X} \ltimes \mathfrak{b}$.

On choisit comme drapeau d'idéaux d
$$\begin{aligned}\{0\} \subset \mathfrak{g}_1 = \{\mathrm{Y}_1\} \subset \mathfrak{g}_2 = \{\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2\} &\subset \mathfrak{g}_3 = \{\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3\}\\ \subset \mathfrak{g}_4 = \{\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Y}_4\} &\subset \mathfrak{g}_5 = \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

Considérons l'ouvert de Zariski de Γ
$$\mathscr{O} = \{\ell \in \Gamma \mid \ell_1 \neq 0,\ \ell_2 \neq 0\}\cdot$$

Pour $\ell \in \mathscr{O}$, on a
$$\begin{gathered}\mathfrak{g}_1(\ell) = \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_2(\ell) = \mathfrak{g}_1(\ell) = \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3(\ell) \text{ avec } \mathfrak{h}_3(\ell) = \{0\},\\ \mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{h}_4(\ell), \quad \mathfrak{g}_5(\ell) = \mathfrak{g}_4(\ell) \subset \mathfrak{g}_4.\end{gathered}$$

Par conséquent $\mathrm{T}(e) = \{1,3,4\}$, $\mathrm{S}(e) = \{2,5\}$, $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}}) = \{4\}$ et $\mathrm{U}(e) = \{1,3\}\cdot$

On peut donc prévoir l'existence d'une suite $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4\}$ d'éléments Γ-centraux de Corwin-Greenleaf dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$.

La recherche d'éléments centraux de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ nous permet de mettre en évidence, à la main, une telle suite. On obtient
$$\sigma_1 = \mathrm{Y}_1, \quad \sigma_3 = 2\,\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_3 - \mathrm{Y}_2^2, \quad \sigma_4 = \mathrm{Y}_1^2\mathrm{Y}_4 - \mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_3 + \frac{\mathrm{Y}_2^3}{3}\cdot$$

Afin d'expliciter les fonctions de Corwin-Greenleaf $\{\theta_j\}_{j\in\{1,3,4\}}$ correspondantes et les opérateurs $\{\pi_\ell(\mathrm{Y}_j)\}_{1\leqslant j\leqslant 4}$, nous commençons par remarquer que, pour tout ℓ de $\mathscr{O}$, $\mathfrak{b}$ forme une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ et $\{\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\}$ une base supplémentaire adaptée de $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{g}$, de telle sorte qu'en utilisant les résultats du paragraphe 1.2.7, on obtient une réalisation des représentations π_ℓ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}^*(\mathbb{R})$.

Le fait que les σ_j sont centraux, entraîne que $\pi_\ell(\sigma_j)=\mathrm{V}^{-1}\mathrm{R}({}^t\sigma_j)\mathrm{V}$.

On remarque que $\mathrm{R}(\mathrm{Y})|_{\mathrm{C}^\infty_\tau}=-i\ell(\mathrm{Y})\,\mathrm{Id}_{\mathrm{C}^\infty_\tau}$ pour $\mathrm{Y}\in\mathfrak{b}$. Posant ici $\ell(\mathrm{Y}_j)=\ell_j$ pour $j=1,2$, $\ell(\mathrm{Y}_j)=a_j$ pour $j=3,4$ et $\ell(\mathrm{X})=\ell_5$, il vient :

$$-i\,\pi_\ell(\sigma_1)=\ell_1\,\mathrm{Id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R})},\quad -\pi_\ell(\sigma_3)=(2a_3\ell_1-\ell_2^2)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R})},$$
$$i\,\pi_\ell(\sigma_4)=\Big(a_4\ell_1^2-a_3\ell_1\ell_2+\frac{\ell_2^3}{3}\Big)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R})}\,.$$

De telle sorte que
$$\left\{\begin{array}{rcl} -i\,\theta_1(\ell_1,\ell_2,\ell_5) &=& \ell_1\\ -\,\theta_3(\ell_1,\ell_2,\ell_5) &=& 2\,a_3\,\ell_1-\ell_2^2\\ i\,\theta_4(\ell_1,\ell_2,\ell_5) &=& a_4\,\ell_1^2-a_3\,\ell_1\ell_2+\dfrac{\ell_2^3}{3}\end{array}\right. .$$

Par ailleurs, on voit que pour $\Phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{array}{rcl} -i\,\big(\pi_\ell(\mathrm{Y}_1)\ \Phi\big)(x) &=& \ell_1\,\Phi(x)\\ -i\,\big(\pi_\ell(\mathrm{Y}_2)\ \Phi\big)(x) &=& (\ell_2-\ell_1x)\,\Phi(x)\\ -i\,\big(\pi_\ell(\mathrm{Y}_3)\ \Phi\big)(x) &=& \Big(a_3-\ell_2x+\ell_1\,\dfrac{x^2}{2}\Big)\,\Phi(x)\\ -i\,\big(\pi_\ell(\mathrm{Y}_4)\ \Phi\big)(x) &=& \Big(a_4-a_3\,x+\ell_2\,\dfrac{x^2}{2}-\ell_1\,\dfrac{x^3}{3!}\Big)\,\Phi(x).\end{array}$$

Vérifions, par exemple, la dernière formule. On a

$$\big(\pi_\ell(\mathrm{Y}_4)\,\Phi\big)(x)=\big(\mathrm{L}(\mathrm{Y}_4)\mathrm{V}\Phi\big)(\exp x\mathrm{X})$$
$$=\frac{d}{dt}\mathrm{V}\Phi\big(\exp x\mathrm{X}\cdot\mathrm{Ad}\exp -x\mathrm{X}(\exp -t\mathrm{Y}_4)\big)\big|_{t=0}$$
$$=\frac{d}{dt}\mathrm{V}\Phi\big(\exp x\mathrm{X}\cdot\exp t[-\mathrm{Y}_4+x\mathrm{Y}_3-\frac{x^2}{2}\mathrm{Y}_2+\frac{x^3}{3!}\mathrm{Y}_1]\big)\big|_{t=0}$$
$$=\mathrm{V}\Phi(\exp x\mathrm{X})\cdot\frac{d}{dt}e^{it\left(a_4-xa_3+\frac{x^2}{2}\ell_2-\frac{x^3}{3!}\ell_1\right)}\Big|_{t=0}$$

d'où le résultat.

Posant

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}_1(\ell_1,\ell_2;x) &=& \ell_1\\ \mathrm{A}_2(\ell_1,\ell_2;x) &=& \ell_2-\ell_1x\\ \mathrm{A}_3(\ell_1,\ell_2;x) &=& a_3-\ell_2x+\ell_1\dfrac{x^2}{2}\\ \mathrm{A}_4(\ell_1,\ell_2;x) &=& a_4-a_3x+\ell_2\dfrac{x^2}{2}-\ell_1\dfrac{x^3}{3!},\end{array}\tag{4.2.1}$$

on voit que chaque Z_k, $1\leqslant k\leqslant 4$ est isomorphe à la sous-algèbre de l'algèbre des fonctions polynomiales engendrées par les $\{\mathrm{A}_j\}_{1\leqslant j\leqslant k}$ formée par les fonctions qui ne dépendent pas de x.

On voit en particulier que $-i\,\theta_1 = \mathrm{A}_1$, $-\theta_3 = 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_2^2$ et $i\,\theta_4 = \mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 + \dfrac{\mathrm{A}_2^3}{3}$, comme cela était prévisible.

Utilisant les résultats de la sous-section 4.1, nous pouvons donc affirmer que $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2 = \mathbb{C}[\theta_1]$, que $\{\theta_1, \theta_3\}$ forme un système de générateurs rationnels de Z_3 et une base de transcendance de Z_4, que $\{\theta_1, \theta_3, \theta_4\}$ forme un système de générateurs rationnels de Z_4 et qu'on a $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_5 = \mathrm{Z}_4$. Nous précisons maintenant ces faits dans un cas particulier :

Proposition 4.2.1. *On suppose que, dans l'exemple précédent,* $f = 0$ (i.e. *que* $a_3 = a_4 = 0$). *Dans ce cas,*

1) $\mathrm{Z}_3 = \mathbb{C}[\ell_1, \ell_2^2]$.

2) $\mathrm{Z}_4 = \mathrm{Z}_5 = \mathrm{Z}$ *est isomorphe à la sous-algèbre de* $\mathbb{C}[\ell_1, \ell_2]$ *engendrée linéairement par les monômes de la forme* $\ell_1^p \ell_2^q$ *tels que* $q = 0$ *ou* $q \geqslant 2$.

Démonstration. 1) Les éléments de Z_3 sont des polynômes en ℓ_1 et en ℓ_2, égaux à des fractions rationnelles de ℓ_1 et de ℓ_2^2. Pour des raisons de parité, ce sont donc des éléments de $\mathbb{C}[\ell_1, \ell_2^2]$. On en déduit le résultat.

2) Notons, a priori, Z' la sous-algèbre de l'énoncé. Dans nos hypothèses, on a $-i\,\theta_1 = \ell_1$, $\theta_3 = \ell_2^2$ et $3i\,\theta_4 = \ell_2^3$. Il est donc clair que $\mathrm{Z}' \subseteq \mathrm{Z}$. Pour montrer l'inclusion inverse, donnons-nous un élément θ de Z. Puisque $5 \in \mathrm{S}(e)$, on a $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_4$. A priori, on peut donc écrire,

$$\theta = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4)$$

où P est un polynôme qui ne dépend pas de x. Lorsqu'on développe P en utilisant les formules (4.2.1), les seuls monômes en A_1, A_2, A_3 et A_4 qui donnent des monômes en ℓ_1, ℓ_2 et x de la forme $\ell_1^p \ell_2$ et $\ell_1^{p+1} x$ sont de la forme $\mathrm{A}_1^p \mathrm{A}_2$. Dans le développement de θ en ℓ_1 et ℓ_2, le coefficient du monôme $\ell_1^p \ell_2$ est donc le même que celui de $-\ell_1^{p+1} x$. Ce dernier étant nul, on a bien $\theta \in \mathrm{Z}'$. □

4.3. **Remarques complémentaires.**

Remarques 4.3.1. 1) Soit $k \in \mathrm{T}(e_\mathrm{H})$, ce qui entraîne que $\Theta_{k-1} = \Theta_k$. D'après les théorèmes 4.1.1 et 4.1.2, la famille $\Theta_{\mathrm{R},k-1}$ qui contient Θ_{k-1} forme à la fois un système de générateurs rationnels pour Z_{k-1} et un système algébriquement générateur pour Z_k. Cependant il est faux en général, que $\Theta_{\mathrm{R},k-1}$ forme un système de générateurs rationnels pour Z_k. En effet, s'il est vrai qu'il existe toujours un polynôme P tel que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\{\theta_j\}_{j \in \mathrm{U}_{k-1}(e)}, \theta_k)& \\ &= \sum_{p=0}^{m} \mathrm{P}_p(\{\theta_j\}_{j \in \mathrm{U}_{k-1}(e)})\, \theta_k^p = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}_m(\{\theta_j\}_{j \in \mathrm{U}_{k-1}(e)}) \neq 0,\end{aligned}$$

on a, en général, $m > 1$ et il n'existe pas nécessairement de polynômes S et T tels que

$$\mathrm{S}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{k-1}(e)})\,\theta_k = \mathrm{T}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{k-1(e)}}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{S}(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{k-1}(e)}) \neq 0.$$

2) En général, on a $\mathrm{Z}_k \supsetneq \mathrm{Z}_{k-1}$ dans cette situation bien que Z_k soit algébrique sur Z_{k-1} et que ces deux sous-algèbres aient des bases de transcendance communes.

Pour illustrer ces remarques, choisissons $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et f comme dans la proposition 4.2.1 et considérons le cas $k = 4$. Dans ce cas, on a $-i\theta_1 = \ell_1$, $\theta_3 = \ell_2^2$ et $i\theta_4 = \frac{\ell_2^3}{3}\cdot$ Bien que θ_4 dépende algébriquement de θ_3 par la relation $9\theta_4^2 + \theta_3^3 = 0$, on vérifie immédiatement qu'il n'existe pas de polynômes $\mathrm{S}(\theta_1, \theta_3)$ et $\mathrm{T}(\theta_1, \theta_3)$ tels que

$$\mathrm{S}(\theta_1, \theta_3)\,\theta_4 = \mathrm{T}(\theta_1, \theta_3).$$

En effet, si une telle égalité existait, ses membres de gauche et de droite seraient respectivement de degré impair et pair en ℓ_2.

Par ailleurs, on a $\mathrm{Z}_4 \neq \mathrm{Z}_3$ car $\theta_4 \in \mathrm{Z}_4 \setminus \mathrm{Z}_3$.

Remarque 4.3.2. En général, Z n'est pas une algèbre polynomiale.

Vérifions par l'absurde, que ce n'est effectivement pas le cas dans la situation de la proposition 4.2.1.

Soit Z^* l'idéal de Z formé par les fonctions qui s'annulent en $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Soit I l'idéal de Z engendré vectoriellement par les éléments de la forme $\ell_1^p \ell_2^q$ tels que ou bien $p \geqslant 2$, $q = 0$, ou bien $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$, ou bien $q \geqslant 4$. On a alors

$$\mathrm{Z}^* = \mathbb{C}\ell_1 \oplus \mathbb{C}\ell_2^2 \oplus \mathbb{C}\ell_2^3 \oplus \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Z}^* \cdot \mathrm{Z}^* = \mathrm{I}.$$

On voit que $\{\ell_1, \ell_2^2, \ell_2^3\}$ forme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel Z^*/I et donc que $\dim \mathrm{Z}^*/\mathrm{I} = 3$.

Soit $\{\alpha_1 = \alpha_1(\ell_1, \ell_2),\ \alpha_2 = \alpha_2(\ell_1, \ell_2)\}$ un système de générateurs polynomiaux de Z, son degré de transcendance étant 2. Sans perte de généralité, on peut supposer α_1, $\alpha_2 \in \mathrm{Z}^*$. Tout élément de Z^* peut alors s'écrire sous la forme d'un polynôme en α_1, α_2 et comme $\mathrm{Z}^* \cdot \mathrm{Z}^* = \mathrm{I}$, on voit que $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ forme un système générateur linéaire de l'espace vectoriel Z^*/I. Cela contredit le fait que ce dernier est de dimension 3. D'où le résultat.

5. Démonstration des résultats concernant les générateurs rationnels de Z

Nous nous proposons, dans cette section, de démontrer le théorème 4.1.1.

Nous nous donnons une base $\{\mathrm{X}_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathrm{X}_j \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$. Nous lui associons la suite $\{\mathrm{X}_j^*\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ avec

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{X}_j^* & = & \mathrm{X}_j & \text{si} & j \in \mathrm{S}(e) \\ \mathrm{X}_j^* & = & \sigma_j \ = \ \xi_j\, \mathrm{X}_j + \eta_j & \text{si} & j \in \mathrm{T}(e). \end{array}$$

où $\{\sigma_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)}$ est une suite d'éléments de Corwin-Greenleaf, comme dans la sous-section 3.4

Lemme 5.1. *Soit* $k \in [1\dots n]$. *Alors pour tout élément* W *de* $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$, *il existe d'une part, une famille* $\{\alpha_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)}$ *de* $\mathbb{N}^{\mathrm{card}\,\mathrm{T}_k(e)}$ *et de l'autre, une application*

$$(\beta_1\dots\beta_k) \to \lambda_{\beta_1\dots\beta_k} \quad \textit{de} \quad \mathbb{N}^k \quad \textit{dans} \quad \mathbb{C},$$

nulle sauf pour un nombre fini d'éléments, de telle sorte qu'on ait pour $\ell \in \Gamma$ (*ou pour* $\ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma$)

$$\pi_\ell\Big(\prod_{j\in \mathrm{T}_k(e)} \xi_j^{\alpha_j}\cdot \mathrm{W}\Big) = \pi_\ell\Big(\sum_{(\beta_1\dots\beta_k)\in\mathbb{N}^k} \lambda_{\beta_1\dots\beta_k}\ \mathrm{X}_k^{*\beta_k}\dots \mathrm{X}_1^{*\beta_1}\Big).$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est simple, mais elle est cependant délicate à expliciter. Nous montrons par récurrence sur k' que, pour tout k' tel que $1 \leqslant k' \leqslant k$, il existe d'une part, un élément

$$\{\alpha_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)\setminus \mathrm{T}_{k-k'}(e)} \in \mathbb{N}^{\mathrm{card}\,\mathrm{T}_k(e)-\mathrm{card}\,\mathrm{T}_{k-k'}(e)}$$

et de l'autre, une application

$$(\beta_{k-k'+1}\dots\beta_k) \to \mathrm{A}_{\beta_{k-k'+1}\dots\beta_k} \quad \text{de } \mathbb{N}^{k'} \text{ dans } \mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'}),$$

nulle sauf en un nombre fini de points, de telle sorte que sur Γ, on ait

$$\begin{aligned}\pi_\ell\Big(&\prod_{j\in \mathrm{T}_k(e)\setminus \mathrm{T}_{k-k'}(e)} \xi_j^{\alpha_j}\cdot \mathrm{W} - \\ &\sum_{(\beta_{k-k'+1}\dots\beta_k)\in\mathbb{N}^{k'}} \mathrm{X}_k^{*\beta_k}\dots \mathrm{X}_{k-k'+1}^{*\beta_{k-k'+1}}\,\mathrm{A}_{\beta_{k-k'+1}\dots\beta_k}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Nous montrons que cette propriété est vérifiée au rang k' ou bien avec $k' = 1$, ou bien avec $k' > 1$ et en la supposant vérifiée par récurrence au rang $k'-1$. Pour $k' = k$, on aura $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'}) = \mathscr{U}(\mathfrak{g}_0) = \mathbb{C}$ et on obtiendra la formule du lemme.

Nous utiliserons le fait que les ξ_j et les σ_j sont Γ-centraux.

Les éléments de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'+1})$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\mathrm{X}_{k-k'+1}^{\beta}\mathrm{B}$ où $\mathrm{B}\in\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'})$. Pour $k' = 1$, on a donc une relation de la forme $\pi_\ell(\mathrm{W} - \sum_{\gamma\in\mathbb{N}} \mathrm{X}_k^{\gamma}\mathrm{B}_\gamma) = 0$ avec $\mathrm{B}_\gamma \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$.

Pour $k' > 1$, on obtient le résultat analogue suivant, en utilisant la récurrence :

$$\begin{aligned}\pi_\ell\Big(&\prod_{j\in \mathrm{T}_k(e)\setminus \mathrm{T}_{k-k'+1}(e)} \xi_j^{\alpha_j}\cdot \mathrm{W} - \\ &\sum_{\gamma=(\gamma_{k-k'+1}\dots\gamma_k)\in\mathbb{N}^{k'}} \mathrm{X}_k^{*\gamma_k}\dots \mathrm{X}_{k-k'+2}^{*\gamma_{k-k'+2}}\mathrm{X}_{k-k'+1}^{\gamma_{k-k'+1}}\cdot \mathrm{B}_{\gamma_{k-k'+1}\dots\gamma_k}\Big) \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.2}$$

où les B_γ ($\gamma\in\mathbb{N}^{k'}$) sont dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'})$.

Si $k-k'+1 \in \mathrm{S}(e)$, on a $\mathrm{X}_{k-k'+1} = \mathrm{X}^*_{k-k'+1}$ et $\mathrm{T}_{k-k'}(e) = \mathrm{T}_{k-k'+1}(e)$. Dans (5.2), on pose

$$\beta_k = \gamma_k, \dots, \beta_{k-k'+1} = \gamma_{k-k'+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{\beta_{k-k'+1}\cdots\beta_k} = \mathrm{B}_{\gamma_{k-k'+1}\cdots\gamma_k},$$

on a alors directement la formule (5.1) dans ce cas.

Si $k-k'+1 \in \mathrm{T}(e)$, on pose $\alpha = \max\limits_{\gamma\in\mathbb{N}^{k'}} \gamma_{k-k'+1}$. En faisant agir $\pi_\ell(\xi_{k-k'+1})^\alpha$ sur les deux membres de l'égalité (5.2), on est amené à montrer que les expressions $\pi_\ell(\xi_{k-k'+1})^\alpha \cdot \mathrm{X}^\beta_{k-k'+1}$ telles que $\beta \leqslant \alpha$ peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\mathrm{X}^{*\,a}_{k-k'+1}\mathrm{A}$ avec $a \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'})$. Pour simplifier, nous posons $\xi_{k-k'+1} = \xi$, $\mathrm{X}_{k-k'+1} = \mathrm{X}$, $\eta_{k-k'+1} = \eta$ et $\sigma = \mathrm{X}^* = \xi\mathrm{X} + \eta$.

Comme $\alpha \geqslant \beta$, on a

$$\pi_\ell(\xi^\alpha\,\mathrm{X}^\beta) = \pi_\ell(\xi^\beta\,\mathrm{X}^\beta\,\xi^{\alpha-\beta}) = \pi_\ell\big((\mathrm{X}^* - \eta)^\beta\,\xi^{\alpha-\beta}\big)$$

De plus, η et ξ sont dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-k'})$, on a bien les résultats attendus. Cela prouve la récurrence dans ce cas et le lemme. $\square$

Nous faisons maintenant la convention suivante, si $\{a_j\}_{j\in\mathrm{T}}$ désigne une famille d'éléments d'un monoïde non nécessairement commutatif, indexés par le sous-ensemble ordonné T, alors dans l'expression $\prod\limits_{j\in\mathrm{T}} \uparrow a_j$ (resp. $\prod\limits_{j\in\mathrm{T}} \downarrow a_j$), la flèche indique qu'on fait le produit des a_j dans le sens des j croissants (resp. décroissants).

Pour $\mathrm{S} = \{\mathrm{S}_j\}_{j\in\mathrm{S}_k(e)} \in \mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)}$, nous posons ainsi $\mathrm{X}^\mathrm{S} = \prod\limits_{j\in\mathrm{S}_k(e)} \uparrow \mathrm{X}_j^{\mathrm{S}_j}$.

On peut alors reformuler le lemme 5.1 sous la forme suivante :

Lemme 5.2. *Soient* $k \in [1\dots n]$ *et* $\mathrm{W} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$, *alors il existe d'une part, un élément* $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}$ *de* $\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{T}_k(e)}$ *et de l'autre, une application* $\mathrm{S} \to a_\mathrm{S} = a_\mathrm{S}(\{\sigma_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)})$ *de* $\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)}$ *dans la sous-algèbre de* $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$ *engendrée par les* $\{\sigma_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}$, *nulle sauf pour un nombre fini d'éléments, de telle sorte que pour* $\ell \in \Gamma$ (*ou pour* $\ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma$), *on ait*

$$\pi_\ell(\xi^\alpha\mathrm{W}) = \pi_\ell\Big(\sum_{\mathrm{S}\in\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)}} a_\mathrm{S}\mathrm{X}^\mathrm{S}\Big) \quad \text{avec} \quad \xi^\alpha = \prod_{j\in\mathrm{T}_k(e)} \xi_j^{\alpha_j}.$$

Dans le lemme précédent, remplaçons W par un élément Γ-central σ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$. On obtient la

Proposition 5.3. *Soient* $1 \leqslant k \leqslant n$ *et* σ *un élément* Γ*-central de* $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$. *Il existe alors un élément* $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}$ *de* $\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{T}_k(e)}$ *et une expression polynomiale* $a = a\big(\{\sigma_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}\big)$ *tels que pour tout* ℓ *de* Γ (*ou de* $\mathrm{G}\cdot\Gamma$), *on ait* $\pi_\ell(\xi^\alpha\sigma) = \pi_\ell(a)$ *avec* $\xi^\alpha = \prod\limits_{j\in\mathrm{T}_k(e)} \xi_j^{\alpha_j}$.

Démonstration. Avec les notations du lemme précédent, on a

$$\pi_\ell\Big(a_0 - \xi^\alpha\sigma + \sum_{\mathrm{S}\in\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)}\setminus\{0\}} a_{\mathrm{S}}\,\mathrm{X}^{\mathrm{S}}\Big) = 0,$$

où a_0 et les a_{S} sont des éléments Γ-centraux de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$.

Sur Γ, nous considérons les fonctions β_0 et β_{S} telles que $\pi_\ell(a_0 - \xi^\alpha\sigma) = \beta_0(\ell)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ et que $\pi_\ell(a_{\mathrm{S}}) = \beta_{\mathrm{S}}(\ell)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$. On a donc

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)}} \beta_{\mathrm{S}}(\ell)\,\pi_\ell(\mathrm{X}^{\mathrm{S}}) = 0.$$

Mais on sait (Pedersen, [Ped], lemma 2.2.13) que pour ℓ générique sur Γ, la restriction de π_ℓ au sous-espace engendré par les X^{S} est fidèle. Comme les X^{S} forment un système libre, on a donc

$$\beta_{\mathrm{S}}(\ell) = 0 \quad \text{pour } \ell \text{ générique sur } \Gamma, \quad \forall \mathrm{S}\in\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)},$$

(et, par conséquent, pour tout ℓ de $\mathrm{G}\cdot\Gamma$).

On obtient alors l'égalité de la proposition en prenant $\mathrm{S}=0$ et en posant $a = a_0$. □

Nous prouvons tout d'abord le 2) du théorème 4.1.1, à savoir que pour $k \in \mathrm{S}(e)$, on a $\mathrm{Z}_k = \mathrm{Z}_{k-1}$. Nous nous donnons donc un élément Γ-central σ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$ et nous nous proposons de montrer qu'il existe un élément σ_0 de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ tel que $\pi_\ell(\sigma) = \pi_\ell(\sigma_0)$ sur Γ. Pour cela, utilisant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, nous considérons une décomposition $\sigma = \sigma_0 + \mathrm{X}_k\,\sigma_1$ avec $\sigma_0 \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ et $\sigma_1 \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$. Remplaçant W par σ dans le lemme 5.2, on a tout d'abord

$$\pi_\ell(\xi^\alpha\sigma) = \pi_\ell\Big(\sum_{\mathrm{S}\in\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)}} a_{\mathrm{S}}\mathrm{X}^{\mathrm{S}}\Big) \text{ pour } \ell \text{ générique sur } \Gamma,$$

avec, par ailleurs $\pi_\ell(\xi^\alpha\sigma) = \pi_\ell(\xi^\alpha\sigma_0) + \pi_\ell(\xi^\alpha\mathrm{X}_k\,\sigma_1)$. D'où, en utilisant le résultat de Pedersen déjà cité :

$$\pi_\ell(\xi^\alpha\mathrm{X}_k\,\sigma_1) = \pi_\ell\Big(\sum_{\mathrm{S}\in\mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{S}_k(e)},\,\mathrm{S}_k>0} a_{\mathrm{S}}\mathrm{X}^{\mathrm{S}}\Big) = 0.$$

On en déduit que $\pi_\ell(\mathrm{X}_k\,\sigma_1) = 0$ pour ℓ générique sur Γ, et finalement comme prévu, que $\pi_\ell(\sigma) = \pi_\ell(\sigma_0)$ sur Γ.

Nous prouvons maintenant le 1) du théorème 4.1.1 par récurrence sur k. Nous nous donnons $\theta \in \mathrm{Z}_k$ et nous cherchons à prouver que θ peut s'écrire comme une fraction rationnelle des $\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}$.

Si $k = 0$, le résultat est évident : on a $\mathfrak{g}_0 = \{0\}$, $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_0) = \mathrm{Z}_0 = \mathbb{C}$ et θ est scalaire. Si $k > 0$, soit σ un élément Γ-central de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$ tel que $\pi_\ell(\sigma) = \theta(\ell)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ sur Γ. Choisissons $a = a(\{\sigma_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)})$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{\operatorname{card}\mathrm{T}_k(e)}$ comme dans la proposition 5.3, de telle sorte que $\pi_\ell(\xi^\alpha\sigma) = \pi_\ell(a)$.

Soit $\mathrm{P}_0 = a(\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}) \in \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{T}_k(e)}] \subseteq \mathrm{Z}_k$, de telle sorte que $\pi_\ell(a) = \mathrm{P}_0(\ell)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ sur Γ. Soit $\mathrm{Q}_0 \in \mathrm{Z}_{k-1}$ tel que $\pi_\ell(\xi^\alpha) = \mathrm{Q}_0(\ell)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ sur Γ.

On a donc $\mathrm{Q}_0\,\theta = \mathrm{P}_0$. A priori, l'élément Q_0 de Z_{k-1} n'appartient pas nécessairement à $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)}]$. Cependant, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe deux éléments Q_1 et Q de $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_{k-1}(e)}]$ tels que $\mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_0 = \mathrm{Q}$. On a alors $(\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_0)\,\theta = (\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_0)$ et en posant $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_0 = \mathrm{Q}$ et $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}$, il vient

$$(5.3)\qquad \mathrm{Q}\,\theta = \mathrm{P} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_{k-1}(e)}] \text{ et } \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_k(e)}],$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.1.

6. Préparatifs techniques pour la démonstration du théorème 4.1.2, sur les bases de transcendance de Z

6.1. **Généralités. Notations.** La démonstration du 1) du théorème 4.1.2 se fera par récurrence sur $n = \dim \mathrm{G}$.

Nous noterons Γ_j le sous-espace affine $\mathrm{p}_j(\Gamma)$ dans $\mathfrak{g}_j^*$.

Dans toute la section, nous supposerons $n \geqslant 1$. Nous serons amenés à poser $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{n-1}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{n-1}$ et à associer à G' les mêmes objets que ceux qu'on avait associés à G, en les notant avec les mêmes lettres affectées d'un prime. Nous considérerons, par exemple, les drapeaux d'idéaux

$$d' = \{\mathfrak{g}_j\}_{0\leqslant j\leqslant n-1} \quad \text{de} \quad \mathfrak{g}' \qquad \text{et} \qquad d_{\mathrm{K}'} = \{\mathfrak{k}_j\}_{j\in \mathscr{I}(\mathrm{K}', d_{\mathrm{K}'})} \quad \text{de} \quad \mathfrak{k}'$$

lorsque $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et en utilisant les notations de la sous-section 3.1, avec $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'$ et $\mathscr{I}(\mathrm{K}', d_{\mathrm{K}'}) = \mathscr{I}(\mathrm{K}, d_{\mathrm{K}}) \cap [0 \ldots n-1]$.

Nous noterons $\mathscr{I}' = \mathscr{I}(\mathrm{H}', d_{\mathrm{H}'}) = \mathscr{I} \cap [1 \ldots n-1]$ pour simplifier.

De même, on notera $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$ et $\Gamma' = \{\ell' \in \mathfrak{g}'^* \mid (\ell' - f')(\mathfrak{h}') = \{0\}\}$. Pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$, nous noterons p'_j la projection canonique de $\mathfrak{g}'^* = \mathfrak{g}_{n-1}^*$ sur $\mathfrak{g}_j^* = \mathfrak{g}_j'^*$. On a alors $\mathrm{p}'_j(\Gamma') = \Gamma'_j = \Gamma_j$. On posera $\mathrm{p} = \mathrm{p}_{n-1}$. C'est la surjection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}'^*$.

La représentation $(\pi'_\ell, \mathscr{H}'_\ell)$ sera l'élément du dual unitaire $\widehat{\mathrm{G}}'$ de G', associé à $\ell \in \mathfrak{g}'^*$ par l'application de Kirillov.

Les énoncé mathématiques comprenant des symboles affectés d'exposants $^{(\prime)}$, pourront être lus de deux façons : tout d'abord, en supprimant ces exposants, ensuite, en les remplaçant par un $'$. Par exemple, $a^{(\prime)} \in \mathrm{A}^{(\prime)}$ signifiera qu'on a simultanément $a \in \mathrm{A}$ et $a' \in \mathrm{A}'$.

6.2. **Les injections des Z_k dans les $\mathrm{Z}^{k,\mathrm{G}}$.** Étant donné le drapeau d d'idéaux de $\mathfrak{g}$. Nous convenons de poser, pour $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathrm{Z}_j^k = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_k, f|_{\mathfrak{g}_k}; \mathfrak{g}_j)$$

de telle sorte qu'avec les conventions antérieures, on a $\mathrm{Z}_j^n = \mathrm{Z}_j$, $\mathrm{Z}_{n-1}^{n-1} = \mathrm{Z}'$ et $\mathrm{Z}_j^{n-1} = \mathrm{Z}'_j$. Nous conviendrons de plus, de poser $\mathrm{Z}^k = \mathrm{Z}_k^k$.

Nous noterons $\mathrm{Z}_j^{k,\mathrm{G}}$ (resp. $\mathrm{Z}_j^{k,\mathrm{G}'}$), la sous-algèbre de Z_j^k formée par les fonctions qui se prolongent (de façon nécessairement unique), en une fonction G-invariante sur $\mathrm{G}\cdot\Gamma_k$ (resp. sur $\mathrm{G}'\cdot\Gamma_k$). Nous écrirons aussi $\mathrm{Z}^{k,\mathrm{G}}$ au lieu de $\mathrm{Z}_k^{k,\mathrm{G}}$ et Z'^{G} au lieu de $\mathrm{Z}^{n-1,\mathrm{G}}$.

Proposition 6.2.1. *Pour* $0 \leqslant k \leqslant n$ (resp. $0 \leqslant k \leqslant n-1$), *on a une injection* ι_k *de* Z_k *dans* $\mathrm{Z}^{k,\mathrm{G}}$ (resp. ι'_k *de* Z'_k *dans* $\mathrm{Z}^{k,\mathrm{G}'}$), *caractérisée par*

$$\begin{array}{rcllll} \iota_k(\theta)(\ell_k) & = & \theta(\ell) & \text{pour} & \theta \in \mathrm{Z}_k,\ \ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma, & \ell_k = \ell|_{\mathfrak{g}_k} \\ (\text{resp. } \iota'_k(\theta)(\ell'_k) & = & \theta(\ell') & \text{pour} & \theta \in \mathrm{Z}'_k,\ \ell' \in \mathrm{G}'\cdot\Gamma', & \ell'_k = \ell'|_{\mathfrak{g}_k}) \end{array}$$

Nous noterons aussi $\iota = \iota_{n-1} : \mathrm{Z}_{n-1} \to \mathrm{Z'}^{\mathrm{G}}$.

Démonstration. Il suffit évidemment de prouver la première assertion.

Nous utilisons le fait qu'il existe toujours une polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en $\ell \in \mathfrak{g}^*$, qui est *admissible* relativement à tous les idéaux du drapeau d. Autrement dit telle que, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_j$ est une polarisation de $\mathfrak{g}_j$ en ℓ_j. C'est le cas, par exemple, des polarisations de Vergne. De plus, on a le

Lemme 6.2.2. *Soit* $\mathfrak{p}$ *une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* $\ell \in \mathfrak{g}^*$, *admissible relativement à tous les idéaux du drapeau* d. *Alors, l'application restriction qui à* Φ *associe* $\Phi|_{\mathrm{G}_k}$, *définit une surjection de* $\mathscr{H}^\infty(\mathrm{G},\mathfrak{p},\ell)$ *sur* $\mathscr{H}^\infty(\mathrm{G}_k,\mathfrak{p}_k,\ell_k)$.

Démonstration. Posons

$$\begin{array}{lll} \mathrm{T}(\ell) = \{j \in [1\ldots n] \mid \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_j(\ell)\} & \text{et} & \mathrm{T}_k(\ell) = \mathrm{T}(\ell) \cap [1\ldots k] \\ \mathrm{S}(\ell) = \{j \in [1\ldots n] \mid \mathfrak{g}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{g}_{j-1}\} & \text{et} & \mathrm{S}_k(\ell) = \mathrm{S}(\ell) \cap [1\ldots k]. \end{array}$$

Choisissons une base forte de Malčev $\{\mathrm{X}_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathfrak{g}$ relativement à d de telle sorte que $\{\mathrm{X}_j\}_{j\in\mathrm{T}(\ell)}$ forme une base forte de Malčev de $\mathfrak{g}(\ell)$.

On a la bijection polynomiale

$$\beta : \mathbb{R}^{\mathrm{card}(\mathrm{S}(\ell)\setminus\mathrm{S}_k(\ell))} \times \mathrm{G}_k \times \mathbb{R}^{\mathrm{card}(\mathrm{T}(\ell)\setminus\mathrm{T}_k(\ell))} \longrightarrow \mathrm{G}$$

donnée, avec les notations déjà introduites pour l'énoncé du lemme 5.2, par

$$\beta(\{s_j\}_{j\in\mathrm{S}(\ell)\setminus\mathrm{S}_k(\ell)},\, g_k,\, \{t_j\}_{j\in\mathrm{T}(\ell)\setminus\mathrm{T}_k(\ell)}) = \prod_{j\in\mathrm{S}(\ell)\setminus\mathrm{S}_k(\ell)}{\downarrow}\ \exp s_j\mathrm{X}_j \cdot\ g_k \cdot \prod_{j\in\mathrm{T}(\ell)\setminus\mathrm{T}_k(\ell)}{\uparrow}\ \exp t_j\mathrm{X}_j$$

Fixons $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\mathrm{card}\,\mathrm{S}(\ell)\setminus\mathrm{S}_k(\ell)})$ avec $\varphi(0) = 1$. Soit $\Phi_k \in \mathscr{H}^\infty(\mathrm{G}_k,\mathfrak{p}_k,\ell_k)$. La fonction Φ sur G telle que

$$\Phi\big(\beta(\{s_j\}_{j\in\mathrm{S}(\ell)\setminus\mathrm{S}_k(\ell)},\, g_k,\, \{t_j\}_{j\in\mathrm{T}(\ell)\setminus\mathrm{T}_k(\ell)})\big) = \varphi(\{s_j\}_{j\in\mathrm{S}(\ell)\setminus\mathrm{S}_k(\ell)}) \cdot e^{-i\sum_{j\in\mathrm{T}(\ell)\setminus\mathrm{T}_k(\ell)} \ell(t_j\mathrm{X}_j)}\Phi_k(g_k)$$

est bien un élément de $\mathscr{H}^\infty(\mathrm{G},\mathfrak{p},\ell)$ tel que $\Phi|_{\mathrm{G}_k} = \Phi_k$. Ceci prouve le lemme. □

Soit maintenant un élément Γ-central σ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_k)$ avec $\pi_\ell(\sigma) = \theta(\ell)\ \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\ell^\infty}$ pour $\ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma$. On a $\theta \in \mathrm{Z}_k$. Dans le contexte et avec les notations du lemme, posons

$$(\pi_{\ell_k}, \mathscr{H}_{\ell_k}) = (\pi(\mathrm{G}_k,\mathfrak{p}_k,\ell_k), \mathscr{H}(\mathrm{G}_k,\mathfrak{p}_k,\ell_k))$$

Pour tout $\Phi \in \mathscr{H}^\infty(\mathrm{G},\ell,\mathfrak{p})$ et tout $g_k \in \mathrm{G}_k$, on a

$$\pi_{\ell_k}(\sigma)(\Phi|_{\mathrm{G}_k})(g_k) = \pi_\ell(\sigma)(\Phi)(g_k) = \theta(\ell)\ \Phi|_{\mathrm{G}_k}(g_k)$$

On a donc $\pi_{\ell_k}(\sigma) = \theta(\ell)\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}^\infty_{\ell_k}}$ pour $\ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma$. Ceci prouve la proposition, compte tenu du fait que la G-invariance de θ sur $\mathrm{G}\cdot\Gamma$ entraîne la G-invariance de $\iota_k(\theta)$ sur $\mathrm{G}\cdot\Gamma_k$. □

6.3. Forme explicite des fonctions de Corwin-Greenleaf.

Proposition 6.3.1. *Soient $j \in \mathrm{T}(e)$, $\mathrm{X}_j \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$ et $\theta_j \in \mathrm{Z}_j$ une fonction de Corwin-Greenleaf d'ordre j. Alors, il existe un couple de fonctions Φ_j et φ_j sur $\mathrm{G}\cdot\Gamma_{j-1}$, Φ_j est de plus G-invariante et non identiquement nulle, dont les restrictions à Γ_{j-1} sont polynomiales et telles que, pour tout ℓ de $\mathrm{G}\cdot\Gamma$,*

$$\theta_j(\ell) = \Phi_j(\ell_{j-1})\,\ell(\mathrm{X}_j) + \varphi_j(\ell_{j-1}). \tag{6.3.1}$$

Démonstration. Pour $\ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma$, on réalise $(\pi_\ell, \mathscr{H}_\ell)$ sous la forme $\pi_\ell = \pi(\mathrm{G}, \mathfrak{p}, \ell)$ où $\mathfrak{p}$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ.

Notons $\mathscr{O}$ l'ouvert de Zariski $\mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{G}, d)$ de Γ. Comme $j \in \mathrm{T}(e)$, on a $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_j(\ell)$ pour $\ell \in \mathrm{G}\cdot\mathscr{O}$. Nous allons montrer que sur $\mathrm{G}\cdot\mathscr{O}$, la fonction

$$\ell \to \theta_j(\ell) - \Phi_j(\ell_{j-1})\,\ell(\mathrm{X}_j)$$

ne dépend que de $\mathrm{p}_{j-1}(\ell)$. Cette propriété s'étendra alors par continuité à $\mathrm{G}\cdot\Gamma$. Comme la restriction à Γ de cette fonction est polynomiale, on en déduira la formule (6.3.1) et la proposition.

Pour cela, on voit tout d'abord que $\mathfrak{g}_j(\ell)$ ne dépend que de $\mathrm{p}_{j-1}(\ell) = \ell_{j-1}$. Il existe donc une application $\mathrm{X} : \mathrm{p}_{j-1}(\mathrm{G}\cdot\mathscr{O}) \to \mathfrak{g}_{j-1}$ telle que, pour $\ell \in \mathrm{G}\cdot\mathscr{O}$:

$$\mathrm{X}_j + \mathrm{X}(\ell_{j-1}) \in \mathfrak{g}_j(\ell) \subseteq \mathfrak{p}.$$

On utilisera aussi le fait que si on a $\sigma \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\pi_\ell(\sigma)$ est scalaire alors,

$$\mathrm{L}(\sigma)\,(\psi) = \mathrm{R}({}^t\sigma)\,(\psi) \quad \text{pour tout} \quad \psi \in \mathscr{H}^\infty_\ell,$$

(voir les raisonnements de la sous-section 1.4).

Soit $\sigma_j = \xi_j \mathrm{X}_j + \eta_j$, un élément de Corwin-Greenleaf associé à la fonction θ_j comme dans la définition 3.4.1. On a pour $\ell \in \mathrm{G}\cdot\mathscr{O}$ et $\psi \in \mathscr{H}^\infty_\ell$:

$$\begin{aligned}
\pi_\ell(\sigma_j)\,(\psi) &= \mathrm{L}\Big[\xi_j\cdot(\mathrm{X}_j + \mathrm{X}(\ell_{j-1})) + (\eta_j - \xi_j\cdot\mathrm{X}(\ell_{j-1}))\Big]\,(\psi)\\
&= \mathrm{R}(-\mathrm{X}_j - \mathrm{X}(\ell_{j-1}))\cdot\mathrm{R}({}^t\xi_j)\,(\psi)\\
&\qquad\qquad + \mathrm{R}({}^t\eta_j + \mathrm{X}(\ell_{j-1})\cdot{}^t\xi_j)\,(\psi)\\
&= i\ell(\mathrm{X}_j + \mathrm{X}(\ell_{j-1}))\,\pi_\ell(\xi_j)\,(\psi) + \mathrm{R}({}^t\eta_j + \mathrm{X}(\ell_{j-1})\cdot{}^t\xi_j)\,(\psi)\\
&= i\ell(\mathrm{X}_j)\,\pi_\ell(\xi_j)\,(\psi)\\
&\qquad \mathrm{R}\Big({}^t\eta_j + (\mathrm{X}(\ell_{j-1}) - i\ell\,(\mathrm{X}(\ell_{j-1})))\cdot{}^t\xi_j\Big)\,(\psi).
\end{aligned}$$

Le fait que ξ_j soit un élément Γ-central de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ entraîne, d'après la proposition 6.2.1, l'existence d'une fonction Φ_j, G-invariante sur $\mathrm{G}\cdot\Gamma_{j-1}$, dont la restriction à Γ_{j-1} est polynomiale et telle que

$$i\pi_\ell(\xi_j) = \Phi_j(\ell_{j-1})\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}^\infty_\ell}$$

D'où, par différence et pour tout $\psi \in \mathscr{H}_\ell^\infty$:

$$\begin{aligned}(\theta_j(\ell) - \Phi_j(\ell_{j-1})\,\ell(\mathrm{X}_j)) \cdot \psi \\ = \mathrm{R}\Big({}^t\eta_j + (\mathrm{X}(\ell_{j-1}) - i\ell\,(\mathrm{X}(\ell_{j-1}))) \cdot {}^t\xi_j\Big)(\psi).\end{aligned}$$

Choisissons de plus la polarisation $\mathfrak{p}$ admissible, relativement à tous les idéaux du drapeau d. Alors, pour tout $\psi \in \mathscr{H}_\ell^\infty$, on a d'après le lemme 6.2.2 :

$$\begin{aligned}&(\theta_j(\ell) - \Phi_j(\ell_{j-1})\,\ell(\mathrm{X}_j)) \cdot \psi|_{\mathrm{G}_{j-1}} \\ &\quad= \mathrm{R}\Big({}^t\eta_j + (\mathrm{X}(\ell_{j-1}) - i\ell\,(\mathrm{X}(\ell_{j-1}))) \cdot {}^t\xi_j\Big)(\psi)\Big|_{\mathrm{G}_{j-1}} \\ &\quad= \mathrm{R}\Big({}^t\eta_j + (\mathrm{X}(\ell_{j-1}) - i\ell\,(\mathrm{X}(\ell_{j-1}))) \cdot {}^t\xi_j\Big)(\psi|_{\mathrm{G}_{j-1}}).\end{aligned}$$

Cela montre bien que sur $\mathrm{G}\cdot\mathscr{O}$, $\theta_j(\ell) - \Phi_j(\ell_{j-1})\,\ell(\mathrm{X}_j)$ ne dépend que de $\mathrm{p}_{j-1}(\ell)$, comme prévu. □

6.4. **Les sous-ensembles d'indices $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'})$ et $\mathrm{T}(e')$.** Les deux propositions suivantes sont des préliminaires, la lettre $\mathfrak{k}$ y représente une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ avec $\mathrm{K} = \exp\mathfrak{k}$. Nous utiliserons la première, ou bien dans le cas où $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_j$ $(j \in \mathscr{I}')$, ou bien dans le cas où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_j$ $(j \in [0 \ldots n-1])$. Les résultats concernant les orbites sont cités pour mémoire et ils ne seront pas utilisés dans la suite.

Proposition 6.4.1. *Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*, \ell' = \ell|_{\mathfrak{g}'}$. On a les équivalences ci-dessous :*

$$\begin{aligned}1)\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell} &\iff \mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell'). \\ &\iff \dim \mathrm{K}\cdot\ell = \dim \mathrm{K}\cdot\ell'. \\ &\iff \mathrm{K}\cdot\ell \ \textit{est non saturée dans la direction } \mathfrak{g}'^{\perp}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2)\quad \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell} \subseteq \mathfrak{g}' &\iff \mathfrak{k}(\ell) \neq \mathfrak{k}(\ell') \\ &\qquad \textit{et alors } \mathfrak{k}(\ell) \subsetneq \mathfrak{k}(\ell') \textit{ avec} \\ &\qquad \dim\mathfrak{k}(\ell) = \dim\mathfrak{k}(\ell') - 1. \\ &\iff \dim \mathrm{K}\cdot\ell \neq \dim \mathrm{K}\cdot\ell'. \\ &\qquad \textit{et alors } \dim \mathrm{K}\cdot\ell = \dim \mathrm{K}\cdot\ell' + 1 \\ &\iff \mathrm{K}\cdot\ell \ \textit{est saturée dans la direction } \mathfrak{g}'^{\perp}.\end{aligned}$$

Ou bien les propriétés équivalentes du 1), *ou bien celles du* 2) *sont vérifiées. Ces deux possibilités s'excluent mutuellement*

Démonstration. Montrons l'équivalences des propriétés du 1). On rappelle qu'on a $\mathfrak{k}(\ell') = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell}$, (voir le paragraphe 3.1.3).

a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell} \Rightarrow \mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell')$:

En effet, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell}$, on a $\mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{B}_\ell} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell} \cap (\mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell})^{\mathrm{B}_\ell} = \mathfrak{k}(\ell')$.

b) $\mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell') \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell}$:

Soit $\mathrm{X}_n \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$. La propriété $\mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell')$ entraîne que $\mathfrak{g} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell})^{\mathrm{B}_\ell}$ et en particulier que $\mathrm{X}_n \in (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell})^{\mathrm{B}_\ell}$. La forme $\mathrm{Y} \to \ell([\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}])$ sur $\mathfrak{k}$ induit donc un élément du dual de $\mathfrak{k}/(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell})$.

Par ailleurs, la restriction de B_ℓ au sous-espace $\mathfrak{k} \times \mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{k}/(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell}) \times \mathfrak{g}'/(\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell})$. Il existe donc un élément U de $\mathfrak{g}'$ tel que $\ell([X_n, Y]) = \ell([U, Y]), \forall Y \in \mathfrak{k}$. On a donc $X_n - U \in \mathfrak{k}^{B_\ell} \setminus \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{k}^{B_\ell} \not\subset \mathfrak{g}'$. D'où l'implication.

c) $\dim K \cdot \ell = \dim K \cdot \ell' \Leftrightarrow \mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell')$:
En effet, on a $\dim K \cdot \ell = \dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{k}(\ell)$ et $\dim K \cdot \ell' = \dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{k}(\ell')$.

d) $K \cdot \ell$ non saturée $\Leftrightarrow \mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell')$:
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} K \cdot \ell \ \text{non saturée} &\iff (\forall h \in K, \ \ h\ell' = \ell' \ \Rightarrow \ h\ell = \ell) \\ &\iff (\forall Y \in \mathfrak{k}, \ \ell([Y, \mathfrak{g}']) = \{0\} \ \Rightarrow \ \ell([Y, \mathfrak{g}]) = \{0\}) \\ &\iff \mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell'). \end{aligned}$$

Les équivalences du 2) s'obtiennent en prenant les propriétés opposées du 1) et en sont de simples reformulations. Le fait que, quand elles sont vérifiées, on a $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^{B_\ell} \subsetneq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{B_\ell}$ avec $\dim \mathfrak{k}(\ell) = \dim \mathfrak{k}(\ell') - 1$ résulte du fait que $\mathfrak{g}'$ est un hyperplan dans $\mathfrak{g}$. $\square$

Posons $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; K, d_K) \cap p^{-1}(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; K', d_{K'}))$ dans la proposition suivante; $\mathscr{O}$ et sa projection $\mathscr{O}' = p(\mathscr{O})$ dans Γ', sont respectivement des ouverts de Zariski de Γ et de Γ'. Plus précisément, $\mathscr{O}$ est le sous-ensemble de Γ formé par les éléments ℓ tels que

$$\dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \min_{\ell \in \Gamma} \dim \mathfrak{k}_j(\ell), \qquad \forall j \in \mathscr{I}(K, d_K)$$
$$\dim \mathfrak{k}_j(\ell') = \min_{\ell \in \Gamma} \dim \mathfrak{k}_j(\ell') = \min_{\ell' \in \Gamma'} \dim \mathfrak{k}_j(\ell'), \qquad \forall j \in \mathscr{I}(K', d_{K'}).$$

Proposition 6.4.2. *Dans le contexte ci-dessus, une des deux situations suivantes est vérifiée. Elles s'excluent mutuellement* :

1) $T(e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; K', d_{K'})) = T_{n-1}(e(\Gamma, \mathfrak{g}^*; K, d_K))$.

2) *Il existe un entier* $r(K) \in \mathscr{I}(K, d) \cap [1 \dots n-1] = \mathscr{I}(K', d') \setminus \{0\}$ *tel que*

$$T(e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; K', d_{K'})) = T_{n-1}(e(\Gamma, \mathfrak{g}^*; K, d_K)) \cup \{r(K)\}.$$

Pour qu'on soit dans la situation du 1), *il faut et il suffit qu'on ait*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}^{B_\ell}, \ \textit{pour } \ell \textit{ générique sur } \Gamma, \textit{ plus précisément pour } \ell \in \mathscr{O},$$

ou que l'une des propriétés équivalentes du 1) *de la proposition* 6.4.1 *soit vérifiée pour* $\ell \in \mathscr{O}$.

Pour qu'on soit dans la situation du 2), *il faut et il suffit qu'on ait*

$$\mathfrak{k}^{B_\ell} \subseteq \mathfrak{g}', \ \textit{pour } \ell \textit{ générique sur } \Gamma, \textit{ plus précisément pour } \ell \in \mathscr{O},$$

ou bien que l'une des propriétés équivalentes du 2) *de la proposition* 6.4.1 *soit vérifiée pour* $\ell \in \mathscr{O}$.

Démonstration. Soit $j \in \mathscr{I}(K', d') \setminus \{0\}$. D'après la proposition 6.4.1, appliquée avec $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_j$, une et une seule des deux situations ci-dessous est vérifiée :

a) $\mathfrak{k}_j(\ell) = \mathfrak{k}_j(\ell')$ ou de façon équivalente $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}_j^{\mathrm{B}_\ell}$, $\forall \ell \in \mathscr{O}$. On voit alors qu'on a

$$\mathfrak{k}_{j'}(\ell) = \mathfrak{k}_{j'}(\ell') \text{ pour les } j' \in \mathscr{I}(\mathrm{K}', d') \text{ tels que } j' \leqslant j, \quad \forall \ell \in \mathscr{O}.$$

b) $\mathfrak{k}_j(\ell) \subsetneq \mathfrak{k}_j(\ell')$ ou de façon équivalente, $\dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_j(\ell') - 1$, ou encore $\mathfrak{k}_j^{\mathrm{B}_\ell} \subseteq \mathfrak{g}'$. On voit alors qu'on a

$$\dim \mathfrak{k}_{j'}(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{j'}(\ell') - 1, \quad \forall j' \in \mathscr{I}(\mathrm{K}', d') \text{ tels que } j' \geqslant j, \quad \forall \ell \in \mathscr{O}.$$

Prenant $j = n - 1$, on a donc les deux possibilités suivantes :

a) On a $\mathfrak{k}'(\ell) = \mathfrak{k}_{n-1}(\ell) = \mathfrak{k}_{n-1}(\ell') = \mathfrak{k}'(\ell')$, $\forall \ell \in \mathscr{O}$. Cela entraîne que $\mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k}(\ell')$: c'est évident si $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'$. Sinon, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}$ avec

$$\mathfrak{k}(\ell) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{B}_\ell} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'^{\mathrm{B}_\ell} \cap \mathfrak{k}^{\mathrm{B}_\ell} = \mathfrak{k}(\ell').$$

On est donc nécessairement dans la situation du 1).

b) On a $\dim \mathfrak{k}'(\ell) = \dim \mathfrak{k}'(\ell') - 1$, $\forall \ell \in \mathscr{O}$. Dans ce cas, il existe un plus petit élément $r(\mathrm{K})$ de $\mathscr{I}(\mathrm{K}', \mathrm{d}') \setminus \{0\}$ tel que

$$\dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell') - 1, \quad \forall \ell \in \mathscr{O}.$$

On a donc $\dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_j(\ell')$, $\forall \ell \in \mathscr{O}$, dès que $j < r(\mathrm{K})$. Cela entraîne que

$$\mathrm{T}_{r(\mathrm{K})-1}\big(e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{K}', d_{\mathrm{K}'})\big) = \mathrm{T}_{r(\mathrm{K})-1}\big(e(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{K}, d_{\mathrm{K}})\big).$$

De même, on a $\dim \mathfrak{k}_j(\ell) = \dim \mathfrak{k}_j(\ell') - 1$, $\forall \ell \in \mathscr{O}$, dès que $j > r(\mathrm{K})$. Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\big(e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{K}', d_{\mathrm{K}'})\big) \setminus \mathrm{T}_{r(\mathrm{K})}\big(e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{K}', d_{\mathrm{K}'})\big)& \\ = \mathrm{T}\big(e(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{K}, d_{\mathrm{K}})\big) \setminus \mathrm{T}_{r(\mathrm{K})}&\big(e(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{K}, d_{\mathrm{K}})\big)\end{aligned}$$

On remarque encore que, $\forall \ell \in \mathscr{O}$,

$$\dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})-1}(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})-1}(\ell') \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell') - 1.$$

d'où $\dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell) - \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})-1}(\ell) = \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell') - \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})-1}(\ell') - 1.$

Comme les expressions $\dim \mathfrak{k}_j(\ell^{(\prime)}) - \dim \mathfrak{k}_{j-1}(\ell^{(\prime)})$ sont des entiers égaux à 0 ou 1, on a nécessairement, $\forall \ell \in \mathscr{O}$,

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell') &= \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})-1}(\ell') + 1 \quad \text{d'où} \quad r(\mathrm{K}) \in \mathrm{T}\big(e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{K}', d_{\mathrm{K}'})\big),\\ \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})}(\ell) &= \dim \mathfrak{k}_{r(\mathrm{K})-1}(\ell) \qquad\quad \text{d'où} \quad r(\mathrm{K}) \notin \mathrm{T}\big(e(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{K}, d_{\mathrm{K}})\big).\end{aligned}$$

Finalement, on est nécessairement dans la situation du 2) de la proposition qui est démontrée. □

Nous reprenons les notations et les conventions introduites dans les sous-sections 3.1 à 3.3. On pose

$$e_{\mathrm{H}'} = e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{H}', d_{\mathrm{H}'}) \quad \text{et} \quad e' = e(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{G}', d')$$

On a ainsi

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'}) & = & \{j \in \mathscr{I}' \mid \mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_{j-1} + \mathfrak{h}_j(\ell'),\ \text{pour } \ell' \text{ générique dans } \Gamma'\} \\ \mathrm{T}(e') & = & \{j \in [1 \ldots n-1] \mid \mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_j(\ell'), \\ & & \qquad\qquad \text{pour } \ell' \text{ générique dans } \Gamma'\}. \end{array}$$

Pour $n \geqslant 1$, il sera utile dans les récurrences, de comparer $\mathrm{T}(e)$ et $\mathrm{T}(e')$ ainsi que $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$ et $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'})$.

Dans la suite, nous poserons $r = r(\mathrm{K})$ et $q = r(\mathrm{G})$. Dans les deux propositions suivantes, nous reformulons la proposition 6.4.2 dans le cas où $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}$ puis dans le cas où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$.

Proposition 6.4.3. *Soit* $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{H}, d_{\mathrm{H}}) \cap \mathrm{p}^{-1}(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{H}', d_{\mathrm{H}'}))$ *dans* Γ. *Une des deux situations ci-dessous est vérifiée. Elles s'excluent mutuellement :*

1) $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'}) = \mathrm{T}_{n-1}(e_{\mathrm{H}})$.

2) *Il existe* $r \in \mathscr{I}' \setminus \{0\}$ *tel que* $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'}) = \mathrm{T}_{n-1}(e_{\mathrm{H}}) \cup \{r\}$.

Pour qu'on soit dans la situation du 1), *il faut et il suffit qu'une des propriétés équivalentes suivantes soit réalisée :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{h}^{\mathrm{B}_\ell} \Longleftrightarrow \mathfrak{h}(\ell) = \mathfrak{h}(\ell')$$

pour ℓ *générique dans* Γ, *plus précisément pour* $\ell \in \mathscr{O}$ *et* $\ell' = \mathrm{p}(\ell)$.

Pour qu'on soit dans la situation 2), *il faut et il suffit qu'une des propriétés équivalentes suivantes soit réalisée :*

$$\mathfrak{h}^{\mathrm{B}_\ell} \subseteq \mathfrak{g}' \Longleftrightarrow \mathfrak{h}(\ell) \subsetneq \mathfrak{h}(\ell')$$

pour ℓ *générique dans* Γ, *plus précisément pour* $\ell \in \mathscr{O}$ *et* $\ell' = \mathrm{p}(\ell)$. *On a alors* $\dim \mathfrak{h}(\ell) = \dim \mathfrak{h}(\ell') - 1$.

Dans cette situation, r *est l'élément de* $\mathscr{I}'$ *tel que, pour* $\ell \in \mathscr{O}$:

– $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{h}_j^{\mathrm{B}_\ell}$ *ou de façon équivalente,* $\mathfrak{h}_j(\ell) = \mathfrak{h}_j(\ell')$ *pour* $j < r$.

– $\mathfrak{h}_j^{\mathrm{B}_\ell} \subset \mathfrak{g}'$ *ou de façon équivalente,* $\mathfrak{h}_j(\ell) \subsetneq \mathfrak{h}_j(\ell')$, *avec dans ce cas*

$$\dim \mathfrak{h}_j(\ell) = \dim \mathfrak{h}_j(\ell') - 1 \quad \textit{pour} \quad r \leqslant j \leqslant n-1.$$

Proposition 6.4.4. *Soit* $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{G}, \mathrm{d}) \cap \mathrm{p}^{-1}(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{G}', \mathrm{d}'))$ *dans* Γ. *Une des deux situations ci-dessous est vérifiée. Elles s'excluent mutuellement :*

1) $\mathrm{T}(e') = \mathrm{T}_{n-1}(e)$.

2) *Il existe* $q \in [1 \ldots n-1]$ *tel que* $\mathrm{T}(e') = \mathrm{T}_{n-1}(e) \cup \{q\}$.

Pour qu'on soit dans la situation du 1), *il faut et il suffit qu'une des propriétés équivalentes suivantes soit réalisée :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{g}(\ell) \Longleftrightarrow \mathfrak{g}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell')$$

pour ℓ *générique dans* Γ, *plus précisément pour* $\ell \in \mathscr{O}$ *et* $\ell' = \mathrm{p}(\ell)$.

Pour qu'on soit dans la situation 2), *il faut et il suffit qu'une des propriétés équivalentes suivantes soit réalisée* :

$$\mathfrak{g}(\ell) \subseteq \mathfrak{g}' \Longleftrightarrow \mathfrak{g}(\ell) \subsetneq \mathfrak{g}(\ell')$$

pour ℓ *générique dans* Γ, *plus précisément pour* $\ell \in \mathscr{O}$ *et* $\ell' = \mathrm{p}(\ell)$. *On a alors* $\dim \mathfrak{g}(\ell) = \dim \mathfrak{g}(\ell') - 1$.

Dans cette situation, q *est l'élément de* $\mathscr{I}'$ *tel que, pour* $\ell \in \mathscr{O}$:

– $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{g}_j^{\mathrm{B}_\ell}$ *ou de façon équivalente,* $\mathfrak{g}_j(\ell) = \mathfrak{g}_j(\ell')$ *pour* $j < q$.

– $\mathfrak{g}_j^{\mathrm{B}_\ell} \subset \mathfrak{g}'$ *ou, de façon équivalente,* $\mathfrak{g}_j(\ell) \subsetneq \mathfrak{g}_j(\ell')$, *avec dans ce cas*

$$\dim \mathfrak{g}_j(\ell) = \dim \mathfrak{g}_j(\ell') - 1 \quad \textit{pour} \quad q \leqslant j \leqslant n-1.$$

On a, comme conséquence des deux résultats précédents :

Proposition 6.4.5. *Lorsque* $\mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'}) = \mathrm{T}_{n-1}(e_{\mathrm{H}}) \cup \{r\}$, *il existe nécessairement un entier* q, $1 \leqslant q \leqslant r$, *tel que* $\mathrm{T}(e') = \mathrm{T}(e) \cup \{q\}$.

Démonstration. En effet on a, $\mathfrak{g}_r^{\mathrm{B}_\ell} \subseteq \mathfrak{h}_r^{\mathrm{B}_\ell} \subseteq \mathfrak{g}'$. Ce qui prouve, d'après les résultats précédents que $q \leqslant r$. □

On pose $\mathrm{U}(e') = \mathrm{T}(e') \setminus \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}'})$ et pour $n > 1$ et $0 < k \leqslant n-1$,

$$\mathrm{U}_k(e') = \mathrm{U}(e') \cap [1 \dots k] = \mathrm{T}_k(e') \setminus \mathrm{T}_k(e_{\mathrm{H}'}).$$

Comparons $\mathrm{U}_k(e)$ et $\mathrm{U}_k(e')$. On a immédiatement la

Proposition 6.4.6. *On suppose* $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *alors on se trouve dans l'une des situations ci-dessous, qui s'excluent mutuellement* :

1) $\mathrm{U}_k(e') = \mathrm{U}_k(e)$.
2) $\mathrm{U}_k(e') = \mathrm{U}_k(e) \cup \{q\}$.
3) $\mathrm{U}_k(e') \cup \{r\} = \mathrm{U}_k(e) \cup \{q\}$.

Pour qu'on se trouve dans la situation du 1), (resp. *dans la situation du* 2), resp. *dans la situation du* 3)), *il faut et il suffit qu'une des conditions ci-dessous soit vérifiée* :

1) a) q *n'existe pas.* (resp. 2) a) $q \leqslant k$ *et* r *n'existe pas.*
1) b) $k < q$. 2) b) $q \leqslant k < r$.)
1) c) $q = r \leqslant k$. (resp. 3) a) $q < r \leqslant k$.)

6.5. **Sur certains chemins différentiables dans les Γ_k.** Dans ce qui va suivre, les objets P, V et K ont les mêmes propriétés que dans le paragraphe 3.1.1. Le théorème suivant est donné par Grélaud-Corwin-Greenleaf ([C-G-G], lemma 2 of theorem 4), dans le cas où $\mathrm{K} = \mathrm{G}$ et $\mathrm{V} = \mathfrak{g}^*$. La généralisation ci-dessous est immédiate :

Théorème 6.5.1. (Transversalité des orbites). *Soit* K *un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{k}$. *Soient* V *un espace vectoriel réel de dimension finie, et une représentation linéaire* $g, \ell \to g \cdot \ell$ *de* K *dans* V *qui induit une représentation* $\mathrm{X}, \ell \to \mathrm{X} \cdot \ell$ *de* $\mathfrak{k}$ *dans* V. *Soit* P *un sous-espace affine de* V.

Alors, l'intérieur de Zariski $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{P},\mathrm{V};\mathrm{K})$ *du sous-ensemble formé par les éléments* ℓ *tels que* $\mathrm{T}_\ell\mathrm{K}\cdot\ell\cap\mathrm{T}_\ell\mathrm{P}=\mathrm{T}_\ell(\mathrm{K}\cdot\ell\cap\mathrm{P})$, *est non vide.*

Démonstration. Nous utiliserons le lemme suivant. Dans ce résultat, et seulement dans ce résultat, les objets V, P et W ont des propriétés plus générales que dans l'énoncé et dans le reste de la démonstration du théorème.

Lemme 6.5.2. *Soit* V *une variété différentielle,* Ω *et* P *des sous-variétés (plongées) de* V *et* $\ell\in\Omega\cap\mathrm{P}$. *On suppose qu'il existe un ouvert* $\mathscr{U}$ *de* V, *un ouvert* $\mathscr{V}$ *de* P *tels que* $\ell\in\mathscr{V}\subseteq\mathscr{U}\cap\mathrm{P}$ *et une application différentiable* F *de* $\mathscr{U}$ *dans une variété différentielle* W *avec* $\varphi=\mathrm{F}|_{\mathscr{V}}$ *pour application-restriction de telle sorte que :*

1) $\varphi^{-1}(\varphi(\ell))=\Omega\cap\mathscr{V}$.
2) $\mathrm{F}^{-1}(\varphi(\ell))\supseteq\Omega\cap\mathscr{U}$.
3) $\operatorname{rang} d_{\ell'}\varphi$ *est constant pour* $\ell'\in\mathscr{V}$.

Alors on a $\mathrm{T}_\ell\Omega\cap\mathrm{T}_\ell\mathrm{P}=\mathrm{T}_\ell(\Omega\cap\mathrm{P})$. (Autrement dit, l'intersection de Ω et de P est transverse en ℓ).

Preuve (du lemme). Indépendamment des conditions 1), 2) et 3), on a évidemment $\mathrm{T}_\ell(\Omega\cap\mathrm{P})\subseteq\mathrm{T}_\ell\Omega\cap\mathrm{T}_\ell\mathrm{P}$. Pour montrer l'inclusion inverse, on se donne $\mathrm{Y}\in\mathrm{T}_\ell\Omega\cap\mathrm{T}_\ell\mathrm{P}$, on a successivement :

a) $\mathrm{Y}\in\mathrm{T}_\ell\Omega\Rightarrow d_\ell\mathrm{F}(\mathrm{Y})=0$ à cause du 2).
b) Comme $\mathrm{Y}\in\mathrm{T}_\ell\mathrm{P}$, $d_\ell\varphi(\mathrm{Y})$ a un sens et on a $d_\ell\varphi(\mathrm{Y})=d_\ell\mathrm{F}(\mathrm{Y})=0$.
c) On a donc $\mathrm{Y}\in\ker d_\ell\varphi=\mathrm{T}_\ell(\Omega\cap\mathrm{P})$, d'après le 1), le 3) et le théorème du rang constant. Le lemme est démontré. □

En utilisant des résultats sur les orbites de K dans V donnés dans [C-G1] pages 88-93, on obtient les

Rappels 6.5.3. *Il existe un sous-ensemble* U *de* V, *une application* F_0 *de* U *dans un espace vectoriel* W *et une famille* $\{\mathscr{U}_j,p_j,q_j\}_{1\leqslant j\leqslant p}$ *où les* $\mathscr{U}_j$ *sont des ouverts de Zariski de* V, *les* p_j *et les* q_j *des fonctions polynomiales sur les* $\mathscr{U}_j$ *tels que*

1) U *est* K-*stable.*
2) $\mathrm{U}\cap\mathrm{P}$ *est un ouvert de Zariski de* P.
3) $\mathrm{F}_0(\ell_1)=\mathrm{F}_0(\ell_2)\Longleftrightarrow\ell_1$ *et* ℓ_2 *sont sur la même* K-*orbite.*
4) *On a* $\mathrm{U}=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant p}(\mathrm{U}\cap\mathscr{U}_j)$
5) *Les* q_j *ne s'annulent pas sur les* $\mathscr{U}_j$ *et on a* $\mathrm{F}_0|_{\mathrm{U}\cap\mathscr{U}_j}=\dfrac{p_j}{q_j}\cdot$

Avec les notations de [C-G1] theorem 3.1.14, K correspond à G, U correspond à W_d, W à $\mathrm{V}_{\mathrm{T}(d)}$ et la fonction F_0 à $p_{\mathrm{T}(d)}\circ\psi_d^{-1}$.

Pour démontrer le théorème 6.5.1, nous allons montrer que, dans ses hypothèses, on peut appliquer le lemme 6.5.2. Nous cherchons donc des objets $\mathscr{U}$, F et $\mathscr{V}$ convenables de telle sorte que le lemme s'applique pour tout ℓ de $\mathscr{V}$, en posant $\Omega=\mathrm{K}\cdot\ell$.

Dans 6.5.3, l'un des ouverts de Zariski $\mathscr{U}_j$ de $\mathfrak{g}^*$, $\mathscr{U}_1$ par exemple, est tel que $\mathrm{P} \cap \mathscr{U}_1 \neq \emptyset$. On peut prendre $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1$ et $\mathrm{F} = \dfrac{p_1}{q_1}$ sur $\mathscr{U}$. On voit en effet, que la restriction $\mathrm{F}|_{\mathscr{U} \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{P}}$ est définie et rationnelle sur l'ouvert de Zariski non vide $\mathscr{U} \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{P}$ de P. On prend alors $\mathscr{V}$ comme l'ouvert de Zariski de P, sur lequel la différentielle de cette restriction est de rang maximum. Les objets ainsi définis vérifient les propriétés 1) à 3) du lemme 6.5.2 pour tout ℓ de $\mathscr{V}$ avec $\Omega = \mathrm{K} \cdot \ell$. On a donc $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{P}, \mathrm{V}; \mathrm{K})$, et le théorème 6.5.1 est démontré. $\square$

Nous généralisons légèrement une définition de la sous-section 1.2.1 : soit $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$, si $\mathfrak{p}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{l}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{p}$ et si $\ell \in \mathfrak{p}^*$, on convient de poser $\mathfrak{l}^{\mathrm{B}_\ell} = \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \ell([\mathrm{X}, \mathfrak{l}]) = 0\}$·

Corollaire 6.5.4. *Soit* $0 \leqslant k < n$. *Soient* $\Gamma_k = \mathrm{p}_k(\Gamma) \subseteq \mathfrak{g}_k^*$ *et* ℓ *un élément de l'ouvert de Zariski* $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\Gamma_k, \mathfrak{g}_k^*; \mathrm{G})$ *de* Γ_k. *Soit* $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}_k^{\mathrm{B}_\ell} \setminus \mathfrak{g}(\ell)$.

Alors, il existe un chemin différentiable $t \to g(t)$ *de* $]-\varepsilon, \varepsilon[$ *dans* G *tel que*

1) $g'(0) \equiv \mathrm{X} \mod \mathfrak{g}(\ell) \neq 0$.
2) $g(t) \cdot \ell \in \Gamma_k, \quad -\varepsilon < t < \varepsilon$.

Démonstration. On a évidemment $\mathrm{X} \cdot \ell|_{\mathfrak{h}_k} = 0$ avec $\mathrm{X} \cdot \ell \neq 0$. Comme $\ell \in \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\Gamma_k, \mathfrak{g}_k^*; \mathrm{G})$, on a d'après le théorème 6.5.1

$$\mathrm{X} \cdot \ell \in (\mathrm{T}_\ell \mathrm{G} \cdot \ell \cap \mathrm{T}_\ell \Gamma_k) \setminus \{0\} = \mathrm{T}_\ell(\mathrm{G} \cdot \ell \cap \Gamma_k) \setminus \{0\}·$$

Il existe donc un chemin différentiable $\mu : t \to \mu(t)$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathrm{G} \cdot \ell \cap \Gamma_k$, tel que $\mu(0) = \ell$ et $\mu'(0) = \mathrm{X} \cdot \ell$. Soit s une section différentiable de $\mathrm{G}/\mathrm{G}(\ell) \simeq \mathrm{G} \cdot \ell$ dans G, alors l'application $t \to g(t) = (s \circ \mu)(t)$ vérifie les propriétés du corollaire, qui est démontré. $\square$

6.6. **Rappels de résultats concernant les extensions algébriques des anneaux commutatifs intègres.** Nous reprenons et nous complétons la section 1.5. Nous rappelons des résultats sur les extensions algébriques qui nous seront utiles, en renvoyant à Bourbaki ([Bo]), pour les démonstrations. Ils sont le plus souvent bien connus dans le cadre des corps commutatifs, mais on sait que leurs énoncés se généralisent à celui des anneaux commutatifs intègres en utilisant la proposition 1.5.1 et les remarques qui la précèdent.

Nous nous donnons donc un anneau commutatif, intègre et à élément unité $\mathscr{A}$, et un sous-anneau K de $\mathscr{A}$. On a le résultat suivant (voir [Bo], chap. 5, § 3, n°2, prop. 6) :

Proposition 6.6.1. *Soit* E *une partie de* $\mathscr{A}$. *Si* E *est algébrique sur* K, K[E] *est algébrique sur* K.

La proposition suivante concerne la transitivité des extensions algébriques (voir [Bo], chap. 5, § 3, n°3, prop. 8). Pour le démontrer, on notera que l'anneau $\mathscr{A}$ est algébrique sur K, si et seulement si le corps des fractions $\mathrm{Q}(\mathscr{A})$ est algébrique sur Q(K).

Proposition 6.6.2. *Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des anneaux commutatifs intègres à unité, tels que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$. Pour que $\mathscr{B}$ soit algébrique sur $\mathscr{D}$, il faut et il suffit que $\mathscr{C}$ soit algébrique sur $\mathscr{D}$ et que $\mathscr{B}$ soit algébrique sur $\mathscr{C}$.*

Par ailleurs, la notion de degré de transcendance et l'existence du théorème 1.5.2 ou « théorème d'échange » nous permettent d'énoncer immédiatement le résultat suivant (voir aussi [Bo], chap. V, § 5, n°3, cor. 2) :

Théorème 6.6.3. *On suppose que* $\mathrm{tr.d}_{\mathrm{K}}\, \mathscr{A} = m$. *Pour qu'un système de m éléments de $\mathscr{A}$ soit une base de transcendance,* (*il faut et*) *il suffit qu'il soit algébriquement libre ou algébriquement générateur.*

7. Démonstration des résultats concernant les bases de transcendance

Dans cette section, nous nous proposons de prouver le 1) du théorème 4.1.2, c'est à dire de démontrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les familles de Corwin-Greenleaf $\{\theta_j\}_{j \in \mathrm{U}_k(e)}$ forment une base de transcendance des Z_k.

7.1. **Différentes situations pour la démonstration.** On vérifie immédiatement la

Proposition 7.1.1. *Étant donné n et k comme précédemment, on se trouve nécessairement dans une des situations ci-dessous qui s'excluent mutuellement :*

1) $0 = k = n$.

2) $0 \leqslant k < n$.
   a) $\mathrm{U}_k(e) = \mathrm{U}_k(e')$.
   b) $\mathrm{U}_k(e) \cup \{q\} = \mathrm{U}_k(e')$.
   c) $\mathrm{U}_k(e) \cup \{q\} = \mathrm{U}_k(e') \cup \{r\}$.

3) $0 < k = n$.
   a) $0 < k = n,\ n \in \mathrm{S}(e)$.
   b) $0 < k = n,\ n \notin \mathscr{I},\quad n \in \mathrm{T}(e)$.
   c) $0 < k = n,\ n \in \mathscr{I},\quad n \in \mathrm{U}(e)$.
   d) $0 < k = n,\ n \in \mathscr{I},\quad n \in \mathrm{T}(e)$ *et* $n \in \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$.

Remarques et précisions. Dans les situations du 2) b) et c), 3)a) et c), on a nécessairement $n \geqslant 2$. Dans les situations 2) a), 3) b) et 3) d), on a $n \geqslant 1$.

Les divisions du 2) ont été explicitées dans la proposition 6.4.6, les entiers r et q, quand ils existent, ont été introduits respectivement dans la proposition 6.4.3 et dans la proposition 6.4.4.

Les démonstrations du 2) se font par récurrence sur n en partant de $n = 0$.

Les démonstrations dans les situations 3)a) et 3)b) pour un $n \geqslant 2$ donné, utilisent les résultats du théorème dans les situations du 2) pour le même n et les démonstrations du 3)c) et du 3)d) utilisent les résultats du théorème dans les situations du 3)a) et du 3)b). Pour un n donné, il est donc important de prouver le théorème 4.1.2 dans chaque situation de la proposition 7.1.1 et *dans l'ordre de l'énoncé de cette proposition.*

7.2. **Cas $0 = k = n$.** Le résultat est trivial. On a $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_0) = \mathbb{C}$. Par ailleurs, $\mathrm{U}_0(e) = \emptyset$. D'où $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Z}_0 = \mathrm{card}\,\mathrm{U}_0(e) = 0$.

7.3. **Cas où $0 \leqslant k < n$. Utilisation d'une récurrence sur n.** Dans ces situations, on associe à $\theta \in \mathrm{Z}_k$, $\theta' = \iota(\theta) \in \mathrm{Z}'_k$. En particulier, on associe à la famille $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ de fonctions de Corwin-Greenleaf dans Z_k, les fonctions de Corwin-Greenleaf $\theta'_j = \iota(\theta_j)$ dans Z'_k.

7.3.1. *Situation où* $\mathrm{U}_k(e) = \mathrm{U}_k(e')$. Les $\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e')}$ forment une base de transcendance de Z'_k d'après l'hypothèse de récurrence et ils appartiennent à la sous-algèbre $\iota(\mathrm{Z}_k)$ de Z'_k. Ils forment donc également une base de transcendance pour $\iota(\mathrm{Z}_k)$. Comme Z_k et $\iota(\mathrm{Z}_k)$ sont isomorphes, les $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ forment bien une base de transcendance de Z_k.

7.3.2. *Situation où* $\mathrm{U}_k(e) \cup \{q\} = \mathrm{U}_k(e')$. Soit θ_q une fonction de Corwin-Greenleaf d'ordre q de Z'_k. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)} \cup \{\theta_q\}$$

forme une base de transcendance de Z'_k.

Cela entraîne que les $\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ (resp. les $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$) sont algébriquement indépendants dans $\iota(\mathrm{Z}_k) \subseteq \mathrm{Z}'_k$, (resp. dans Z_k).

Il nous reste à vérifier qu'ils sont algébriquement générateurs. Soit $\theta \in \mathrm{Z}_k$. Par récurrence, il existe une expression polynomiale non triviale de la variable θ' à coefficients dans $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta_q]$. En ordonnant cette expression en θ_q, on obtient un résultat de la forme

$$\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{P}_\beta\big(\{\theta_j(\ell)\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta(\ell)\big)\ \theta_q(\ell')^\beta = 0, \quad \forall \ell \in \Gamma \text{ avec } \ell' = \mathrm{p}(\ell),$$
$$\text{avec } \mathrm{P}_\beta \in \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta].$$

Les hypothèses entraînent que l'un des P_β, par exemple $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\gamma$ est de degré $\geqslant 1$ en θ. Si nous parvenons à montrer que tous les P_β, $(0 \leqslant \beta \leqslant \alpha)$ sont nuls, on aura en particulier, $\mathrm{P}\big(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta\big) = 0$, ce qui nous donnera la relation de dépendance algébrique attendue.

Rappelons que les $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ ne dépendent que de ℓ_k. Plus précisément, on a

$$\theta_j(\ell) = \iota_k(\theta_j)(\ell_k), \quad \forall j \in \mathrm{U}_k(e),\ \forall \ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma \text{ avec } \ell_k = \mathrm{p}_k(\ell).$$
$$\theta_q(\ell') = \iota'_k(\theta_q)(\ell_k), \quad \forall \ell \in \mathrm{G}'\cdot\Gamma \text{ avec } \ell' = \mathrm{p}(\ell) \text{ et } \ell_k = \mathrm{p}_k(\ell).$$

Nous considérons alors les fonctions $\mathrm{Q}_\beta = \iota_k\big(\mathrm{P}_\beta(\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta)\big)$ sur $\mathrm{G}\cdot\Gamma_k$ pour $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ qui sont des éléments de $\mathrm{Z}^{k,\mathrm{G}}$, ainsi que les fonctions $\vartheta = \iota'_k(\theta_q)$ et $\mathrm{R} = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{Q}_\beta\,\vartheta^\beta$ sur $\mathrm{G}'\cdot\Gamma_k$ qui sont des éléments de $\mathrm{Z}^{k,\mathrm{G}'}$. Les restrictions de ces fonctions à $\Gamma_k = \mathrm{p}_k(\Gamma)$ sont polynomiales.

Utilisant les notations des sections 3.2, 3.3 et du théorème 6.5.1, définissons l'ouvert de Zariski non vide de Γ_k :

$$\begin{aligned}\mathscr{O} = \mathrm{p}_k(\mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{G}, d)) \cap \mathrm{p}'_k(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{G}, d)) \cap \\ \mathrm{p}_k(\mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{H}, d_{\mathrm{H}})) \cap \mathrm{p}'_k(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{H}, d_{\mathrm{H}})) \cap \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\Gamma_k, \mathfrak{g}_k^*; \mathrm{G}).\end{aligned}$$

Nous montrons que pour les ℓ de $\mathscr{O}$, le polynôme $x \to \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{Q}_\beta(\ell)x^\beta$ admet une infinité de zéros ce qui, en entraînant la nullité des Q_β et donc des P_β, assurera que le théorème est vérifié dans les présentes hypothèses.

Outre la forme de la fonction de Corwin-Greenleaf θ_k, nous utiliserons principalement les faits suivants :

α) Les Q_β sont G-invariantes.
β) ϑ est G$'$-invariante.
γ) R est identiquement nulle sur $\mathrm{G}' \cdot \Gamma_k$.

Posons ici $\ell_{q-1} = \ell|_{\mathfrak{g}_{q-1}}$ pour tout ℓ de $\mathfrak{g}_k^*$. Les propriétés des fonctions de Corwin-Greenleaf, nous permettent d'écrire ϑ sous la forme

$$\vartheta(\ell) = \Phi_q(\ell_{q-1})\,\ell(\mathrm{X}_q) + \varphi_q(\ell_{q-1}), \qquad \forall \ell \in \Gamma_k$$

avec $\mathrm{X}_q \in \mathfrak{g}_q \setminus \mathfrak{g}_{q-1}$ et des fonctions Φ_q et φ_q comme dans la proposition 6.3.1.

Nous utilisons le corollaire 6.5.4 et ses conventions de notation. Soit $\ell \in \mathscr{O}$. Utilisant le fait que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{h}_k^{\mathrm{B}_\ell}$, nous lui associons tout d'abord un élément X_ℓ de $\mathfrak{h}_k^{\mathrm{B}_\ell} \setminus \mathfrak{g}'$. Nous notons que cet élément n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}(\ell)$ puisque $\mathfrak{g}(\ell) \subseteq \mathfrak{g}'$, du fait que $q \leqslant k$. Nous lui associons ensuite un chemin différentiable $t \to g_\ell(t)$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans G, tel que $g'_\ell(0) \equiv \mathrm{X}_\ell \mod \mathfrak{g}' \neq 0$ et que $g_\ell(t) \cdot \ell \in \Gamma_k$ pour tout t.

On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{g}_{q-1}^{\mathrm{B}_\ell}$. Par conséquent, il existe un élément Z_ℓ de $\mathfrak{g}'$ tel que $\mathrm{Y}_\ell = g'_\ell(0) + \mathrm{Z}_\ell \in \mathfrak{g}_{q-1}^{\mathrm{B}_\ell} \setminus \mathfrak{g}'$. On considère le chemin différentiable $t \to h_\ell(t)$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans G donné par $h_\ell(t) = \exp t\mathrm{Z}_\ell \cdot g_\ell(t)$ de telle sorte que $\mathrm{Y}_\ell = h'_\ell(0)$. On pose $\ell_t = h_\ell(t) \cdot \ell$, on voit que $\ell_t \in \mathrm{G}' \cdot \Gamma_k$ pour tout t.

On a $\mathrm{R}(\ell_t) = 0$ d'après γ), $\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{Q}_\beta(\ell_t)\,\vartheta(\ell_t)^\beta = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{Q}_\beta(\ell)\,\vartheta(\ell_t)^\beta = 0$ d'après α). Pour aboutir au résultat et montrer la nullité des Q_β, il nous suffit de vérifier que la fonction différentiable $t \to \vartheta(\ell_t)$ a une dérivée non nulle en 0, ce qui entraînera qu'elle admet une infinité de valeurs sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Notons que $\mathrm{Y}_\ell \in \mathfrak{g}(\ell_{q-1}) = \mathfrak{g}_{q-1}^{\mathrm{B}_\ell}$ et donc que $\mathrm{Y}_\ell \cdot \ell_{q-1} = 0$. Par ailleurs, on a $\ell([\mathrm{X}_q, \mathrm{Y}_\ell]) \neq 0$. Sans cela, on aurait $\ell([\mathfrak{g}_q, \mathrm{Y}_\ell]) = \{0\}$, en contradiction avec le fait que $\mathfrak{g}_q^{\mathrm{B}_\ell} \subseteq \mathfrak{g}'$ et que $\mathrm{Y}_\ell \notin \mathfrak{g}'$. On a alors sur un ouvert de Zariski de Γ_k :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vartheta(\ell_t)|_{t=0} \;=\; & \frac{d}{dt}\Phi_q(h_\ell(t)\cdot\ell_{q-1})\big|_{t=0}\;\ell(\mathrm{X}_q) \\ & +\Phi_q(\ell_{q-1})\;\frac{d}{dt}h_\ell(t)\cdot\ell\big|_{t=0}(\mathrm{X}_q) + \frac{d}{dt}\varphi_q(h_\ell(t)\cdot\ell_{q-1})\big|_{t=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d\Phi_{q,\ell_{q-1}}(\mathrm{Y}_\ell \cdot \ell_{q-1})\ \ell(\mathrm{X}_q) \\ &\quad +\Phi_q(\ell_{q-1})\ \ell([\mathrm{X}_q, \mathrm{Y}_\ell]) + d\varphi_{q,\ell_{q-1}}(\mathrm{Y}_\ell \cdot \ell_{q-1}) \\ &= \Phi_q(\ell_{q-1})\ \ell([\mathrm{X}_q, \mathrm{Y}_\ell]) \ \neq\ 0. \end{aligned}$$

En effet, la fonction polynomiale Φ_q n'est pas identiquement nulle sur Γ_{q-1}. Cela achève la démonstration dans ce cas.

7.3.3. *Situation où* $\mathrm{U}_k(e) \cup \{q\} = \mathrm{U}_k(e') \cup \{r\}$ *avec* $q < r$. On a alors $q < r \leqslant k$, $r \in \mathrm{T}_k(e) \cap \mathrm{T}_k(e_{\mathrm{H}'})$ et $r \notin \mathrm{T}_k(e_{\mathrm{H}})$. Ici encore, on note θ_q une fonction de Corwin-Greenleaf d'ordre q de Z'_k. La démonstration découlera du résultat suivant :

Lemme 7.3.1. *Dans ce cas* , θ_q *est algébrique sur* $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_r(e)}]$.

Démonstration. On a $\theta'_r \in \mathrm{Z}'_r$ et $\mathrm{U}_r(e') = \mathrm{U}_{r-1}(e)\cup\{q\}\cdot$ D'après l'hypothèse de récurrence, $\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)} \cup \{\theta_q\}$ forme une base de transcendance de Z'_r. En particulier, θ'_r est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}, \theta_q]$. Il existe donc un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}, \theta_q, \theta'_r]$ dont le coefficient de la plus grande puissances de θ'_r est non nul dans $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}, \theta_q]$. Ordonnons ce polynôme en θ_q. A priori, deux cas peuvent se produire :

1) Les coefficients des θ_q^β dans Q sont non tous nuls. Cela signifie que θ_q est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}, \theta'_r] = \mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_r(e)}]$. Le lemme est alors vérifié.

2) Les coefficients des θ_q^β dans Q sont tous nuls. Cela entraîne que θ'_r est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}]$ ou, de façon équivalente, que θ_r est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}]$.

Pour prouver le lemme, il suffit de montrer qu'on aboutit à une contradiction si on suppose cette deuxième hypothèse satisfaite. Nous nous donnons donc une relation de la forme $\displaystyle\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{P}_\beta\, \theta_r^\beta = 0$ avec $\mathrm{P}_\beta \in \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}]$, et nous cherchons à prouver qu'on a alors nécessairement $\mathrm{P}_\alpha = 0$, ce qui nous donnera la contradiction attendue.

Rappelons que θ_r (resp. les $\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{U}_{r-1}(e)}$), ne dépend que de ℓ_r (resp. ne dépendent que de ℓ_{r-1}). Plus précisément, on a

$$\begin{gathered} \theta_r(\ell) = \iota_r(\theta_r)(\ell_r), \qquad \theta_j(\ell) = \iota_{r-1}(\theta_j)(\ell_{r-1}) \quad \forall j \in \mathrm{U}_{r-1}(e) \\ \forall \ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma \quad \text{avec} \quad \ell_r = \mathrm{p}_r(\ell) \text{ et } \ell_{r-1} = \mathrm{p}_{r-1}(\ell). \end{gathered}$$

Nous fixons $\mathrm{Y}_r \in \mathfrak{h}_r \setminus \mathfrak{g}_{r-1}$ et nous posons $\gamma = f(\mathrm{Y}_r)$. Le choix de la notation Y_r au lieu de X_r, exprime l'appartenance à $\mathfrak{h}$. Soit $\mathrm{q} : \ell \to \ell|_{\mathfrak{g}_{r-1}}$, la projection canonique de $\mathfrak{g}_r^*$ sur $\mathfrak{g}_{r-1}^*$. Les propriétés des fonctions de Corwin-Greenleaf, nous permettent d'écrire

$$\iota_r(\theta_r)(\ell) = \Phi_r\big(\mathrm{q}(\ell)\big)\, \ell(\mathrm{Y}_r) + \varphi_r\big(\mathrm{q}(\ell)\big), \qquad \forall \ell \in \mathrm{G}\cdot\Gamma_r,$$

avec des fonctions Φ_r et φ_r comme dans la proposition 6.3.1.

Désormais, utilisant la bijection $\ell \to \big(\ell|_{\mathfrak{g}_{r-1}}, \ell(\mathrm{Y}_r)\big)$, nous identifions $\mathrm{q}^{-1}(\Gamma_{r-1})$ avec $\Gamma_{r-1}\times\mathbb{R}$. On a alors $\Gamma_r \simeq \Gamma_{r-1}\times\{\gamma\}\cdot$ Par restriction, q met Γ_r en bijection avec Γ_{r-1}. On a ainsi $\mathrm{q}(\ell,\gamma) = \ell$ pour $\ell \in \Gamma_{r-1}$.

Il sera utile de considérer sur $\mathrm{q}^{-1}(\Gamma_{r-1}) = \Gamma_{r-1} \times \mathbb{R}$, la fonction polynomiale ϑ, donnée par $\vartheta(\ell, x) = \Phi_r(\ell)\, x + \varphi_r(\ell)$, de telle sorte que $\theta_r|_{\Gamma_r} = \vartheta|_{\Gamma_{r-1}\times\{\gamma\}}$.

On note qu'on a $\theta_r(\ell,\gamma) = -\Phi_r(\ell)\, x + \vartheta(\ell, x) + \Phi_r(\ell)\, \gamma$, pour $(\ell, x) \in \Gamma_{r-1} \times \mathbb{R}$. En substituant le terme de droite à $\theta_r(\ell,\gamma)$, dans l'expression

$$\ell \to \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{P}_\beta\big(\{\iota_{r-1}(\theta_j)(\ell)\}_{j\in \mathrm{U}_{r-1}(e)}\big)\, \theta_r(\ell,\gamma)^\beta$$

qui, par hypothèse est identiquement nulle sur Γ_{r-1}, on obtient pour tout ℓ de Γ_{r-1} et pour tout x de $\mathbb{R}$, une identité de la forme

$$\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{Q}^{(1)}_\beta\big(\{\iota_{r-1}(\theta_j)(\ell)\}_{j\in \mathrm{U}_{r-1}(e)}, \Phi_r(\ell), \vartheta(\ell, x)\big)\ x^\beta = 0.$$

Nous posons $\mathrm{Q}_\beta(\ell, x) = \mathrm{Q}^{(1)}_\beta\big(\{\iota_{r-1}(\theta_j)(\ell)\}_{j\in \mathrm{U}_{r-1}(e)}, \Phi_r(\ell), \vartheta(\ell, x)\big)$ et nous remarquons que $\mathrm{Q}_\alpha(\ell, x) = \mathrm{P}_\alpha\big(\{\iota_{r-1}(\theta_j)(\ell)\}_{j\in \mathrm{U}_{r-1}(e)}\big)\,\big(-\Phi_r(\ell)\big)^\alpha$ ne dépend pas de x.

Utilisant les notations des sections 3.2, 3.3 et du théorème 6.5.1, définissons l'ouvert de Zariski non vide de Γ_{r-1} :

$$\begin{aligned}\mathscr{O} = {}&\mathrm{p}_{r-1}\big(\mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{G}, d)\big) \cap \mathrm{p}'_{r-1}\big(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{G}, d)\big)\cap\\ &\mathrm{p}_{r-1}\big(\mathscr{O}(\Gamma, \mathfrak{g}^*; \mathrm{H}, d_{\mathrm{H}})\big) \cap \mathrm{p}'_{r-1}\big(\mathscr{O}(\Gamma', \mathfrak{g}'^*; \mathrm{H}, d_{\mathrm{H}})\big) \cap \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\Gamma_{r-1}, \mathfrak{g}^*_{r-1}; \mathrm{G}).\end{aligned}$$

Soit $\ell \in \mathscr{O}$. Utilisant le fait que, avec les notations du corollaire 6.5.4, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{h}^{\mathrm{B}_\ell}_{r-1}$, nous lui associons tout d'abord un élément X_ℓ de $\mathfrak{h}^{\mathrm{B}_\ell}_{r-1} \setminus \mathfrak{g}'$ et nous notons que cet élément n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}(\ell)$ du fait que $\mathfrak{g}(\ell) \subseteq \mathfrak{g}'$ puisque $q \leqslant r-1$. Utilisant les résultats du corollaire, nous lui associons alors un chemin différentiable $t \to g_\ell(t)$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans G, tel que $g'_\ell(0) \equiv \mathrm{X}_\ell \mod \mathfrak{g}(\ell) \neq 0$ et que $\ell_t = g_\ell(t)\cdot \ell \in \Gamma_{r-1}$ pour tout t. Notant que les $g_\ell(t)$ laissent $\mathrm{q}^{-1}(\Gamma_{r-1})$ stable, nous posons $(\ell_t, x_t) = g_\ell(t)\cdot(\ell,\gamma)$.

L'invariance sous l'action de G des θ_j $(j \in \mathrm{U}_r(e))$ et de Φ_r entraîne que les fonctions $t \to \mathrm{Q}_\beta(\ell_t, x_t)$ sont constantes. On a donc prouvé que

$$t \to \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{Q}_\beta(\ell,\gamma)\ x_t^\beta = 0, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Montrons maintenant que $t \to x_t$ admet une infinité de valeurs, ce qui entraînera que $\mathrm{Q}_\alpha(\ell,\gamma) = 0$ pour $\ell \in \mathscr{O}$ puis, du fait que Φ_r n'est pas identiquement nulle sur Γ_{r-1}, que $\mathrm{P}_\alpha = 0$ et finalement le lemme. Pour cela, il suffit de montrer que $x'_t(0) \neq 0$.

Remarquons que $\ell([\mathrm{Y}_r, \mathrm{X}_\ell]) \neq 0$. Sinon, on aurait $\ell([\mathfrak{g}_r, \mathrm{X}_\ell]) = 0$, en contradiction avec le fait que $\mathfrak{g}^{\mathrm{B}_\ell}_r \subseteq \mathfrak{g}'$ et que $\mathrm{X}_\ell \notin \mathfrak{g}'$. On a alors, comme prévu, $x'_t(0) = g'_t(0)\cdot \ell(\mathrm{Y}_r) = \ell([\mathrm{Y}_r, \mathrm{X}_\ell]) \neq 0$. D'où le lemme. □

Pour terminer la démonstration du théorème dans cette situation, nous partons du fait que, par récurrence, $\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)\setminus\{r\}} \cup \{\theta_q\}$ forme une base de transcendance de Z'_k. Cela entraîne que

1) $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}'_k = \mathrm{card}\, \mathrm{U}_k(e)$.
2) Z'_k est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta_q]$.

Mais, d'après le lemme précédent, θ_q est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}]$. Il en est évidemment de même des $\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$. D'après la proposition 6.6.1, $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}, \theta_q]$ est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}]$. Cela entraîne, d'après le lemme de transitivité (proposition 6.6.2), que Z'_k est également algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}]$. Par conséquent, $\{\theta'_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ est algébriquement générateur dans Z'_k. Comme $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Z}'_k = \mathrm{card}\, \mathrm{U}_k(e)$, c'est aussi une base de transcendance de Z'_k contenue dans $\iota(\mathrm{Z}_k)$.

On en déduit que $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_k(e)}$ est une base de transcendance de Z_k. D'où le résultat dans cette situation.

7.4. **Situations pour lesquelles** $0 < k = n$**.** Nous utilisons le fait, qui vient d'être démontré, que les $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{n-1}(e)}$ forment une base de transcendance de Z_{n-1}. Par ailleurs, nous utiliserons deux fois le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 7.4.1. *On suppose que* $0 < k = n$ *et que* $n \in \mathrm{U}(e)$*, alors les* $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ *forment un système algébriquement générateur de* Z*.*

Démonstration. On a alors $\mathrm{T}(e) = \mathrm{T}_{n-1}(e) \cup \{n\}$ et $\mathrm{U}(e) = \mathrm{U}_{n-1}(e) \cup \{n\}$. Nous savons, d'après le 1) du théorème 4.1.1 que Z est algébrique sur

$$\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)}] = \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_{n-1}(e)}][\theta_n].$$

Or, $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}_{n-1}(e)}]$ est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{n-1}(e)}]$. On en déduit donc que $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{T}(e)}]$ est algébrique sur $\mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}]$. Le lemme de transitivité (proposition 6.6.2), entraîne alors que le système $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ est algébriquement générateur. $\square$

7.4.1. *Cas où* $0 < k = n$ *et* $n \in \mathrm{S}(e)$*.* On a alors $\mathrm{U}(e) = \mathrm{U}_{n-1}(e)$. Par ailleurs, $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{n-1}$, d'après le 2) du théorème 4.1.1. D'où le résultat.

7.4.2. *Cas où* $0 < k = n$, $n \notin \mathscr{I}$ *et* $n \in \mathrm{T}(e)$*.* D'après le lemme 7.4.1, le système $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}(e)}$ est algébriquement générateur. Il nous reste à prouver qu'il est algébriquement libre. Donnons-nous donc une relation de la forme

$$\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{P}_\beta\, \theta_n^\beta = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}_\beta \in \mathbb{C}[\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{n-1}(e)}].$$

Nous allons montrer qu'on a nécessairement $\mathrm{P}_\beta = 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, ce qui entraînera que la relation est triviale et le résultat, du fait que le système $\{\theta_j\}_{j\in \mathrm{U}_{n-1}(e)}$ est algébriquement libre. Pour cela, il suffit de montrer que, pour ℓ générique dans Γ, le polynôme

$$x \to \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{P}_\beta(\ell)\, x^\beta$$

admet une infinité de zéros.

Soient $\ell \in \Gamma$ et $\mathrm{X}_n \in \mathfrak{g}_n \setminus \mathfrak{g}'$. Posons $\ell' = \mathrm{p}(\ell)$ et considérons le chemin différentiable $t \to \ell_t$ de $\mathbb{R}$ dans Γ, donné par $\mathrm{p}(\ell_t) = \ell'$ et $\ell_t(\mathrm{X}_n) = t$.

On a $\mathrm{P}_\beta(\ell_t) = \iota(\mathrm{P}_\beta)(\mathrm{p}(\ell_t)) = \mathrm{P}_\beta(\ell)$ pour tous les β. Par conséquent

$$\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \mathrm{P}_\beta(\ell)\,\theta_n(\ell_t)^\beta = 0.$$

On est donc amené à montrer que $t \to \theta_n(\ell_t)$ admet une infinité de valeurs, pour ℓ générique dans Γ. Cela découle de l'expression de la fonction de Corwin-Greenleaf θ_n telle qu'elle est donnée par la proposition 6.3.1. On obtient

$$\theta_n(\ell_t) = \Phi_n(\ell')\cdot t + \varphi_n(\ell')$$

où $\ell \to \Phi_n(\ell')$ est non nulle sur un ouvert de Zariski de Γ.

Cela achève la démonstration du théorème dans cette situation.

Pour étudier les cas 3) c) et 3) d) de la proposition 7.1.1, nous énonçons deux lemmes :

Lemme 7.4.2. *On suppose que* $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$, *alors on peut trouver un drapeau d'idéaux* $\tilde{d} = \{\tilde{\mathfrak{g}_j}\}_{0\leqslant j\leqslant n}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{h} \subseteq \tilde{\mathfrak{g}_{n-1}}$.

Démonstration. On choisit $\tilde{\mathfrak{g}_{n-1}}$ comme un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$, et on construit les $\{\tilde{\mathfrak{g}_j}\}_{0\leqslant j<n}$, en considérant une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\tilde{\mathfrak{g}_{n-1}}$. □

Lemme 7.4.3. *On a* $\operatorname{card}\mathrm{U}(e) = \mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Z}$.

Démonstration. Ce résultat vient d'être démontré dans toutes les situations où $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Nous supposons donc que $n \in \mathscr{I}$ et nous utilisons le fait que

$$\operatorname{card}\mathrm{U}(e) = \min_{\ell\in\Gamma}\dim\mathfrak{g}(\ell) - \min_{\ell\in\Gamma}\dim\mathfrak{h}(\ell), \tag{7.4.1}$$

qui correspond à une forme particulière de la formule (3.3.1). Le lemme est évident si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Dans ce cas, $\Gamma = \{f\}$ et on a $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{h}(f) = \mathfrak{g}$, de telle sorte que $\operatorname{card}\mathrm{U}(e) = \mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Z} = 0$. Sinon, on utilise le lemme 7.4.2 et le fait que l'expression de droite dans (7.4.1) ne dépend pas du choix du drapeau d. On peut donc remplacer d par $\tilde{d}$, ce qui donne le résultat puisque $\mathfrak{h} \subseteq \tilde{\mathfrak{g}_{n-1}}$. □

7.4.3. *Cas où* $0 < k = n$, $n \in \mathscr{I}$, $n \in \mathrm{T}(e)$ *et* $n \notin \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$. On a donc $n \in \mathrm{U}(e)$. Il suffit pour des raisons de dimensions algébriques (voir le lemme précédent et le théorème 6.6.3), de vérifier que les $\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{U}(e)}$ sont algébriquement générateurs dans Z, ce qui a déjà été démontré dans le lemme 7.4.1.

7.4.4. *Cas où* $0 < k = n$, $n \in \mathscr{I}$, $n \in \mathrm{T}(e)$ *et* $n \in \mathrm{T}(e_{\mathrm{H}})$. On a donc $n \notin \mathrm{U}(e)$. Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent, Il suffit de vérifier que les $\{\theta_j\}_{j\in\mathrm{U}(e)}$ sont algébriquement libres dans Z. Comme $\mathrm{U}(e) = \mathrm{U}_{n-1}(e)$, cela découle directement du fait qu'ils forment une base de transcendance de Z_{n-1}.

La démonstration du 1) et donc du 2) du théorème 4.1.2, concernant les bases de transcendance de Z est alors complète.

Références

[Bon] P. Bonnet. Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire. *J. Func. Anal.*, **55** (1984), 220–246.

[Bo] N. Bourbaki. *Algèbre.* Chapitre 5. Hermann, Paris. 1973.

[C-D] N. Conze et M. Duflo. *Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble.* Bull. Sci. Math. **94** (1970), 201–208.

[C-G1] L. Corwin and F. Greenleaf. *Representations of nilpotent Lie groups and their Applications.* Camb. Studies in adv. Maths. 18. 1989.

[C-G2] L. Corwin and F.P. Greenleaf. A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups. *Comm. Pure Appl. Math. Soc.*, **305** (1988),605–621.

[C-G3] L. Corwin and F.P. Greenleaf. Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity. *Commun. Pure Appl. Math.*, **45** (1992), 681–747.

[C-G-G] L. Corwin, F.P. Greenleaf and G. Grélaud. Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304** (1987), 549–583.

[D1] J. Dixmier. Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes. *Anals. Acad. Brasil. Ci.*, **35** (1963), 491–519.

[D2] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villar, Paris. 1974.

[F-L-M-M] H. Fujiwara, G. Lion, B. Magneron et S. Mehdi. Un critère de commutativité pour l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène nilpotent. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, **332** (2001), 597–600.

[H] J. Humphreys *Linear Algebraic Groups.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 21, Springer-Verlag, New York/ Heidelberg/ Berlin, 1975.

[L] R. Lipsman. Orbital parameters for induced and restricted representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **313** (1989), 433–473.

[Ped] N.V. Pedersen. On the infinitesimal kernel of irreducible representations of nilpotent Lie groups. *Bull. Soc. Math. France*, **112** (1984), 423–467.

[Pen] R. Penney. Abstract Plancherel Theorems and a Frobenius reciprocity Theorem. *J. Func. Anal.*, **18** (1975), 177–190.

[Z-S] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra.* Volume 1. Van Nostrand, Princeton, 1958.

(Hidenori Fujiwara) Faculté de technologie à Kyushu, Université de Kinki, Iizuka 820, Japon

E-mail address, H. Fujiwara: `fujiwara@fuk.kindai.ac.jp`

(Gérard Lion) Modal'X, ufr segmi, Université Paris-X, 200, avenue de la République, 92001 Nanterre Cedex, France

E-mail address, G. Lion: `Gerard.Lion@u-paris10.fr`

(Bernard Magneron) Institut Galilée, Département de mathématiques, Université Paris-Nord, avenue Jean-Baptiste-Clément, 93430 Villetaneuse, France

E-mail address, B. Magneron: `magneron@math.univ-paris13.fr`